www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.6.1

УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)
ББК 22.161

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ ПРИМЕСИ ИЗ ВОДОЕМА В АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫЙ ПОРИСТЫЙ ГРУНТ

Оксана Александровна Гальцева

Старший преподаватель кафедры информатики,
естественнонаучных дисциплин и методик преподавания,
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
galtseva@bsu.edu.ru
ул. Победы, 85, 308015 г. Белгород, Российская Федерация

Аннотация. Работа посвящена рассмотрению начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости в абсолютно твердой пористой среде. Рассматриваемая система дополняется уравнением диффузии примеси в порах твердого грунта и усложняется наличием уравнения движения в самом водоеме. Плотность примеси зависит от ее концентрации. Выводятся макроскопические аналоги исходных микроскопических уравнений.

Ключевые слова: усреднение, система уравнений Стокса, диффузия, уравнение конвекции-диффузии, метод асимптотических разложений.

Постановка задачи

Процесс диффузии примеси из водоема в пористый грунт будем рассматривать в области Ω^0 (водоем) и Ω (пористая среда) (рис. 1), разделенных общей границей S^0.

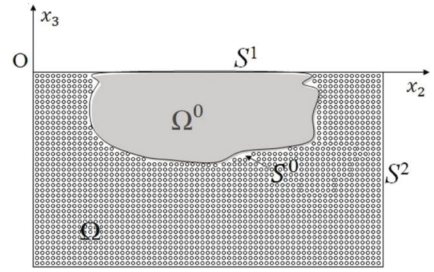

Рис. 1. Диффузия примеси из водоема в грунт

В нашем случае $\Omega \in R^2$ есть ограниченная область, образованная с помощью периодического повторения ячейки $\varepsilon\overline{Y}$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр,

$$\overline{Y} = Y_f \cup Y_s \cup \gamma \cup \partial Y, Y = (0,1)\times(0,1),\ \varepsilon Y = (0,\varepsilon)\times(0,\varepsilon),$$

где $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$ – липшицева граница между множествами Y_f и Y_s.

Через $\overline{\Omega}_f^\varepsilon$ обозначим периодическое повторение элементарной ячейки $\varepsilon\overline{Y}_f$, а через $\overline{\Omega}_s^\varepsilon$ – периодическое повторение $\varepsilon\overline{Y}_s$. Тогда

$$\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon, \text{ где } \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega_s^\varepsilon,$$

а область Y_s окружена областью Y_f (рис. 2), то есть $\overline{Y}_s \cap \partial Y = \varnothing$.

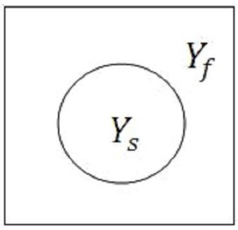

Рис. 2. Элементарная ячейка

Движение примеси в Ω^0 при $t > 0$ описывается стационарной системой уравнения:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_f + \rho(c^\varepsilon)\mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{P}_f = \alpha_\mu \mathbf{D}(x,\mathbf{v}) - p\mathbf{I}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = \lambda_D \Delta c, \tag{3}$$

где $\rho(c^\varepsilon) = \rho_f + \delta c(\mathbf{x},t)$; δ – положительная постоянная; ρ_f – безразмерная плотность жидкости, соотнесенная к плотности воды ρ_0; α_μ – коэффициент вязкости; $\mathbf{D}(x,\mathbf{v})$ – тензор напряжений; p – давление; $\mathbf{I}$ – единичная матрица; $c(\mathbf{x},t)$ – концентрация примеси; $\mathbf{e}$ – единичный вектор силы тяжести; λ_D – коэффициент диффузии; α_μ – коэффициент вязкости примеси $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = (v_1(\mathbf{x},t), v_2(\mathbf{x},t))$.

Движение примеси в пористой среде Ω описывается уравнением неразрывности (2), уравнением баланса

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho(c^\varepsilon)\mathrm{e} = 0, \ \mathbf{P} = \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbf{D}(\mathbf{x},\mathbf{v}^\varepsilon) - p\mathbf{I}, \tag{4}$$

и уравнением диффузии примеси

$$\frac{\partial c^\varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon = \lambda_D \Delta c^\varepsilon, \tag{5}$$

где $\rho(c^\varepsilon) = \chi^\varepsilon(\rho_f + \delta c^\varepsilon(\mathbf{x},t))$.

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ при $t > 0$ выполняются условия непрерывности

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t), \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathsf{P}_f(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathsf{P}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}^0),$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x}^0)$ есть вектор нормали к границе S^0 в $\mathbf{x}^0 \in S^0$.

Задача замыкается граничным условием Неймана на S^1 внешней границы области $Q = \Omega^0 \cup S^0 \cup \Omega$ при $t > 0$

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n} = -p^0(\mathbf{x},t)\mathbf{n}, \tag{8}$$

граничными условиями

$$\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \mathbf{x} \in S^2 = S \setminus \overline{S^1}, \mathbf{x} \in \Gamma^\varepsilon, t > 0, \tag{9}$$

$$\nabla c^\varepsilon(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in S^2 = S \setminus \overline{S^1}, \mathbf{x} \in \Gamma^\varepsilon, t > 0, \tag{10}$$

и начальным условием

$$c(\mathbf{x},0) = c_0(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^0 \cup S^0. \tag{11}$$

В (1)–(11) характеристическая функция $\chi^\varepsilon(\mathbf{x})$ области Ω_f^ε задается выражением

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varsigma(\mathbf{x})\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}),$$

где $\varsigma(\mathbf{x})$ – характеристическая функция водоема; $\chi(\mathbf{y})$ – характеристическая функция ячейки Y_f в единичном квадрате Y.

И пусть

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha_\mu(\varepsilon) = \mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1.$$

Целью данной работы является получение усредненных аналогов уравнений задачи (1)–(10) для случая, когда $\mu_0 = 0$ и $0 < \mu_1 < \infty$. Для этого перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Предположим, что S^1 – часть оси $\{x_3 = 0\}$, $\mathbf{e} = -\mathbf{e}_3$, и, что область Q – подмножество полупространства $\{x_3 < 0\}$. Более того, предположим, что S^2 – это гладкая поверхность и в некоторой малой окрестности плоскости $\{x_3 = 0\}$ определяется как $\Phi(x_1, x_2) = 0$.

Функцию p^0 также положим гладкой:

$$\int_{Q_T} (|\nabla p^0(\mathbf{x},t)|^2 + |\nabla(\frac{\partial p^0}{\partial t})(\mathbf{x},t)|^2)dxdt = \mathbf{P}^2 < \infty.$$

Определение 1. *Тройка функций* $\{\mathbf{v}^\varepsilon, c^\varepsilon, p^\varepsilon\}$ *такая, что*

$$c^\varepsilon \in L_2(\Omega_f^\varepsilon) \cap W_2^{1,0}(\Omega_f^\varepsilon),$$
$$p^\varepsilon \in L_\infty(Q_T), \mathbf{v}^\varepsilon, \mathbf{D}(x, \mathbf{v}^\varepsilon),$$
$$(\zeta + (1-\zeta)\chi_f^\varepsilon)\mathbf{D}(x, \mathbf{v}^\varepsilon) \in \mathbf{L}_2(Q_T),$$

называется обобщенным решением задачи (1)–(10), если она удовлетворяет условию неразрывности (1) почти всюду в $Q_T = Q \times (0,T)$, граничным условиям (9), (10), начальному условию (11) и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} ((\zeta\mathbf{P}_f + (1-\zeta)\mathbf{P}) : \mathbf{D}(x,\varphi) + \nabla \cdot (\varphi p^0) - \widetilde{\rho}(c^\varepsilon)\mathbf{e} \cdot \varphi)dxdt = 0 \tag{12}$$

для любых соленоидальных $\varphi(\mathbf{x},t) = 0$ при S_T^2 и тождеству

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}\left(c^\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}-\nabla c^\varepsilon\cdot\frac{\partial \mathrm{w}^\varepsilon}{\partial t}\psi-\alpha_D\nabla c^\varepsilon\cdot\nabla\psi\right)dxdt=-\int_{\Omega_f^\varepsilon}c_0(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},0)dx \tag{13}$$

для произвольной гладкой функции $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},t)=0$ при $t=T$.

В тождестве (12) $\tilde{\rho}(c^\varepsilon)=(\zeta+(1-\zeta))\rho_f$, а $\zeta=\zeta(\mathbf{x})$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q.

Теорема 1. *Функции* $\{\mathbf{v}^\varepsilon,p^\varepsilon,c^\varepsilon\}$ *являются обобщенным решением задачи (4), (5), (9)–(11), если справедливы оценки:*

$$0\le c^\varepsilon(\mathbf{x},t)\le 1, \mathbf{x}\in\Omega_f^\varepsilon, t>0, \tag{14}$$

$$\int_0^T\int_{\Omega_f^\varepsilon}|\nabla c^\varepsilon|^2\le C\mathbf{e}^2, \tag{15}$$

$$\int_\Omega|\nabla\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t_1)-\nabla\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t_2)|^2\,dx\le C|t_1-t_2|^2, \tag{16}$$

где C – не зависящая от ε константа.

Теорема 2. *Пусть обобщенным решением задачи (2)–(11) являются функции* $\{\mathbf{v}^\varepsilon,p^\varepsilon,c^\varepsilon\}$, *тогда*

I) при $\varepsilon\to 0$ существует такая подпоследовательность, что:

1) $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ сходится слабо к $\mathbf{v}$ в $L_2((0,T);L_2(Q))$;

2) $\{\nabla\cdot\mathbf{v}^\varepsilon\}$ сходится слабо к $\nabla\cdot\mathbf{v}=$ в $L_2((0,T);L_2(Q))$;

3) $\{p^\varepsilon\}$ сходится слабо к p в $L_2((0,T);L_2(Q))$;

4) $\{c^\varepsilon\}$ сходится слабо к c в $L_2((0,T);W_2^1(Q))$ и сильно в $L_2((0,T);L_2(Q))$ к функции c;

II) функции $\{\mathbf{v},p,c\}$ являются обобщенным решением следующей «усредненной» задачи

$$\mathbf{v}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(-\frac{1}{m}\nabla p+\rho(c)\mathrm{e}), \tag{17}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \tag{18}$$

$$\rho(c)=\left(\rho_f+\delta c\right), \tag{19}$$

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla c=\alpha_D\nabla\cdot(\mathbf{B}^{(c)}\nabla c) \tag{20}$$

для скорости $\mathbf{v}$, давления p и концентрации примеси c в области $\Omega\cup\Omega^0$ при $t>0$, дополненной граничными условиями

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=0, \tag{21}$$

на S^2 и начальным условием

$$\frac{\partial c}{\partial\mathbf{n}}=0, \tag{22}$$

$$c(\mathbf{x},0)=c_0(\mathbf{x}), \mathbf{x}\in\Omega. \tag{23}$$

В (17)–(23)

$$m=\langle\chi\rangle_Y=\int_Y\chi(\mathbf{y})dy$$

есть пористость; $\mathbf{B}^{(c)}$ и $\mathbf{B}$ – симметричные и положительно определенные постоянные матрицы, вычисляемые далее по формулам (41) и (51) соответственно; $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали;

III) предельное давление p жидкости в области Ω^0 совпадает при $t>0$ с гидростатическим давлением

$$p(\mathbf{x},t) = p^0(t) - \rho_f x_3 \equiv p_0(\mathbf{x},t). \tag{24}$$

Доказательство теоремы 1 рассматривается в [1, с. 118].

Доказательство теоремы 2. Доказательство сильной сходимости функций c^ε в $L_2((0,T);L_2(Q))$ следует из оценок (14), (15), уравнения диффузии (13), леммы о компактности [3; 4] и свойств соответствующих продолжений [2]. Слабая сходимость $\{p^\varepsilon\}$, $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$ и $\{\nabla\cdot\mathbf{v}^\varepsilon\}$ следует из оценки (16).

Так как усреднение модели диффузии примеси из водоема в абсолютно твердый пористый грунт на текущий момент является задачей нерешенной, проведем формальное усреднение. Для этого представим

$$\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t) + \ldots,$$

$$c^\varepsilon = c(\mathbf{x},t) + \varepsilon C(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t) + \mathrm{K}\ ,$$

$$p^\varepsilon = P(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t) + \ldots,$$

где $\mathbf{V}$ есть 1-периодическая функция по аргументу $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$.

При выводе усредненных уравнений воспользуемся предельным свойством интеграла

$$\int_{\Omega_T}\varphi\ \ (\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)dxdt \to \int_{\Omega_T}(\int_Y\varphi\ \ (\mathbf{x},\mathbf{y},t)dy)dxdt$$

для гладкой 1-периодической по $\mathbf{y}$ функции $\varphi(x,y)$.

Переходя к пределу при $(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon = 0$, для любой гладкой 1-периодической по $\mathbf{y}$ функции σ получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\sigma dxdt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}(1-\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}))(P(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t) + \mathrm{K}\ )\sigma(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)dxdt =$$

$$= \int_{\Omega_T}\int_Y(1-\chi(\mathbf{y}))(P(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y},t)dydxdt = 0.$$

Перепишем $P(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ в виде

$$P(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = P_0(\mathbf{x},t)\chi(\mathbf{y}).$$

Тогда

$$p(\mathbf{x},t) = \langle P\rangle_Y = \int_Y\chi(\mathbf{y})P_0(\mathbf{x},t)dy = mP_0(\mathbf{x},t),$$

откуда $P(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = 1/m\chi(\mathbf{y})p(\mathbf{x},t)$.

Определим вектор-функцию $\varphi = h(\mathbf{x},t)\varphi_0(\mathbf{x}/\varepsilon)$, равную нулю на границе S и

$$\nabla_y\cdot\varphi_0 = 0.$$

Подставим $\mathbf{v}^\varepsilon$, p^ε в исходное уравнение и распишем каждое слагаемое, где

$$\mathbf{D}(x,\mathbf{v}^\varepsilon) = \mathbf{D}(x,\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)) + \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)) + \ldots, \tag{25}$$

а $\mathbf{D}(x,\varphi)$ имеет вид

$$\mathbf{D}(x,\varphi) = \frac{1}{2}(\nabla h(\mathbf{x},t)\otimes\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) + \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\otimes\nabla h(\mathbf{x},t)) + \frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{x},t)\mathbf{D}(y,\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})). \tag{26}$$

Первое слагаемое примет вид

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi^{\varepsilon}\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\mathbf{D}(x,\mathrm{v}^{\varepsilon}):\mathbf{D}(x,\varphi)dxdt=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\left(\mathbf{D}(x,\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t))+\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t))+\ldots\right):$$

$$:(\frac{1}{2}(\nabla h(\mathbf{x},t)\otimes\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})+\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\otimes\nabla h(\mathbf{x},t))+\frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{x},t)\mathbf{D}(y,\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})))dxdt=$$

$$=\mu_0\int_{\Omega_T}h(\mathbf{x},t)\left(\int_Y\chi(\mathbf{y})\mathbf{D}(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)):\mathbf{D}(y,\varphi_0(\mathbf{y}))dy\right)dxdt,$$

так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\mathbf{D}(x,\mathbf{V}(\mathbf{x},t)):$$

$$:(\frac{1}{2}(\nabla h(\mathbf{x},t)\otimes\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})+\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\otimes\nabla h(\mathbf{x},t))+\frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{x},t)\mathbf{D}(y,\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})))dxdt=0, \tag{27}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2\mathbf{D}\left(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)\right):$$

$$:\left(\frac{1}{2}(\nabla h(\mathbf{x},t)\otimes\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})+\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\otimes\nabla h(\mathbf{x},t))\right)dxdt=0, \tag{28}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\frac{\alpha_\mu}{\varepsilon^2}\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2\mathbf{D}(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)):\left(\frac{1}{\varepsilon}h(\mathbf{x},t)\mathbf{D}(y,\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}))\right)dxdt=$$

$$=\mu_0\int_{\Omega_T}h(\mathbf{x},t)\left(\int_Y\chi(y)\mathbf{D}(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)):\mathbf{D}(y,\varphi_0(\mathbf{y}))dy\right)dxdt. \tag{29}$$

Второе слагаемое при $\varepsilon\to 0$ будет

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi^{\varepsilon}p^{\varepsilon}(\nabla h\cdot\varphi_0)dxdt=$$

$$=\int_{\Omega_T}\int_Y\chi(\mathbf{y})P(\mathbf{x},\mathbf{y},t)(\nabla h(\mathbf{x},t)\cdot\varphi_0(\mathbf{y}))dydxdt. \tag{30}$$

Третье слагаемое при $\varepsilon\to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi^{\varepsilon}\rho(c)\mathbf{e}\cdot\varphi_0\,dxdt=\int_{\Omega_T}\int_Y\chi(\mathbf{y})h(\mathbf{x},t)\rho\big(c(\mathbf{x},t)\big)\mathbf{e}(\mathbf{x},t)\cdot\varphi_0(\mathbf{y})dydxdt. \tag{31}$$

Собрав все слагаемые вместе, получим

$$\int_{\Omega_T}(\int_Y\mu_0 h(\mathbf{x},t)\chi(\mathbf{y})\mathbf{D}(y,\mathrm{V}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)):\mathbf{D}(y,\varphi_0(\mathbf{y}))dy+$$

$$+\int_Y\chi(\mathbf{y})P(\mathbf{x},\mathbf{y},t)\nabla h(\mathbf{x},t)\cdot\varphi_0(\mathbf{y})dy)dxdt=$$

$$=\int_{\Omega_T}h(\mathbf{x},t)\left(\int_Y\chi(\mathbf{y})\rho\big(c(\mathbf{x},t)\big)\mathbf{e}(\mathbf{x},t)\cdot\varphi_0(\mathbf{y})dy\right)dxdt. \tag{32}$$

Перепишем (32) в виде

$$\int_{\Omega_T}h(\mathbf{x},t)\chi(\mathbf{y})(\mu_0\mathbf{D}(y,\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{y},t)):\mathbf{D}(y,\varphi_0(\mathbf{y}))+$$

$$+\frac{1}{m}\nabla p(\mathbf{x},t)\cdot\varphi_0(\mathbf{y})-\rho\big(c(\mathbf{x},t)\big)\mathbf{e}(\mathbf{x},t)\cdot\varphi_0(\mathbf{y}))dxdt=0. \tag{33}$$

Реинтегрируя (33), получим

$$\mu_0 \nabla_y \cdot (\mathbf{D}(y, \mathbf{V}) - \frac{1}{m} \nabla p + \rho(c)\mathbf{e}) = \nabla_y Q, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \tag{34}$$

Слагаемое $\nabla_y Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ в (34) возникает из-за ортогональности соленоидальных функций φ_1 в $L_2(Y_f)$ = множеству $\nabla_y Q$ скалярных функций Q.

Теперь перейдем к пределу в уравнении неразрывности

$$\int_{\Omega_T} div \mathbf{v}^\varepsilon \eta dxdt = \int_{\Omega_T} div(\mathbf{v}^\varepsilon \eta) dxdt - \int_{\Omega_T} \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla \eta dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_{S \cup \Gamma^\varepsilon} (\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}) \eta d\sigma dt - \int_{\Omega_T} \mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla \eta dxdt = 0, \tag{35}$$

для произвольной гладкой функции $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$. Подставив выражение для $\mathbf{v}^\varepsilon$ в (35), получим

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\int_{Y_f} \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dy \right) \cdot \nabla \eta(\mathbf{x}, t) dxdt = 0. \tag{36}$$

Реинтегрируя (36), получим макроскопическое уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_T. \tag{37}$$

Проведя аналогичные рассуждения для пробной функции

$$\eta = \varepsilon h(\mathbf{x}, t) \eta_0 (\mathbf{x}/\varepsilon),$$

получим

$$\nabla_y \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f. \tag{38}$$

Будем искать решение задачи (37), (38) в виде

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{V}^{(i)} z_i, \; Q = \sum_{i=1}^{2} Q^{(i)} z_i,$$

где

$$\mathbf{z} = \frac{1}{\mu_0} (-\frac{1}{m} \nabla p + \rho(c)\mathbf{e}),$$

а функции $Q^{(i)}$, $\mathbf{V}^{(i)}$ являются решениями следующих периодических задач:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_y \mathbf{V}^{(i)} - \nabla Q^{(i)} = -\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_f, \\ \mathbf{V}^{(i)} = 0, \quad \mathbf{y} \in \gamma. \end{array} \right\} \tag{39}$$

Тогда

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{V}^{(i)} z_i = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{V}^{(i)} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{V}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{z},$$

учитывая, что

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{V} \rangle_{Y_f} = \langle \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{V}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i) \rangle_{Y_f} \mathbf{z} = \mathbf{B}^{(f)} \left(\frac{1}{\mu_0} (-\frac{1}{m} \nabla p + \rho(c)\mathbf{e}) \right), \tag{40}$$

где

$$\mathbf{B} = \langle \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{V}^{(i)} \otimes \mathbf{e}_i) \rangle_{Y_f}. \tag{41}$$

Существование единственности решения задачи (39) и свойства матрицы

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{2} (\int_{Y_f} \mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{y}) dy) \otimes \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{2} \langle \mathbf{V}^{(i)} \rangle_{Y_f} \otimes \mathbf{e}_i \tag{42}$$

следует из энергетического равенства

$$\int_{Y_f} \nabla \mathbf{V}^{(i)} : \nabla \mathbf{V}^{(j)} dy = \int_{Y_f} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{V}^{(j)} dy. \tag{43}$$

Лемма 1.3. *Матрица* **B** *симметричная положительно определенная.*
Доказательство. Пусть пороговое пространство связное и

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbf{R}^2,$$
$$\mathbf{z}_\zeta = \sum_{i=1}^{2} \zeta_i \mathbf{V}^{(i)}, \mathbf{z}_\eta = \sum_{i=1}^{2} \eta_i \mathbf{V}^{(i)}.$$

Тогда (42) и (43) дает нам

$$(\mathbf{B}\zeta) \cdot \eta = \langle \mathbf{z}_\zeta \rangle_{Y_f} \cdot \eta, \quad \langle \mathbf{z}_\zeta \rangle_{Y_f} \cdot \eta = \langle \nabla \mathbf{z}_\zeta : \nabla \mathbf{z}_\eta \rangle_{Y_f},$$

или

$$(\mathbf{B}\ \zeta) \cdot \eta = \langle \nabla \mathbf{z}_\zeta : \nabla \mathbf{z}_\eta \rangle_{Y_f}, \text{ или } (\mathbf{B}^f \zeta) \cdot \zeta = \langle \nabla \mathbf{z}_\zeta : \nabla \mathbf{z}_\eta \rangle_{Y_f} > 0.$$

В противном случае мы имели бы равенство

$$\nabla \mathrm{z}_\zeta = 0, \text{ или } \mathbf{z}_\zeta = \mathbf{A} \cdot y + \zeta_0,$$

где **A** есть постоянная матрица, а ζ_0 – постоянный вектор. Если принять во внимание усредненные граничные условия на γ для $\mathbf{V}^{(i)}$, сделаем вывод, что $\mathbf{z}_\zeta = 0$. Это отношение означает, что

$$\sum_{i=1}^{2} \zeta_i \mathbf{V}^{(i)}(\mathbf{y}) = 0, |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 > 0,$$

а это невозможно, так как $\mathbf{V}^{(i)}, i = 1,2$ есть линейная независимая функция.

Аналогично проведем усреднение конвективного уравнения диффузии (5). Проинтегрируем и умножим уравнение на произвольную гладкую функцию $\xi = 0$ при $t = T$

$$\int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon (c^\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial t} - \nabla c^\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \xi - \alpha_D \nabla c^\varepsilon \cdot \xi) dx dt = -\int_{\Omega^\varepsilon} \chi^\varepsilon c_0 \xi |_{t=0}\, dx. \tag{44}$$

Проинтегрировав (41), выведем макроскопическое уравнение для концентрации

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (m \nabla c + \langle \nabla_y C \rangle_{Y_f}) = \alpha_D \nabla \cdot (m \nabla_x c + \langle \nabla_y C \rangle_{Y_f}) \tag{45}$$

с соответствующим граничным и начальным условием

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0, \ \mathbf{x} \in S, \ c(\mathbf{x}, 0) = m c_0(\mathbf{x}).$$

Далее, взяв в качестве пробной функции в (5) функцию вида

$$\xi = \varepsilon\xi_0(\mathbf{x},t)\xi_1(\mathbf{x}/\varepsilon),$$

проведем аналогичные рассуждения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon c^\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial t}dxdt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})(c(\mathbf{x},t)+$$

$$+\varepsilon C(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)+\mathrm{K})\cdot\varepsilon\frac{\partial \xi_0}{\partial t}(\mathbf{x},t)\xi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt = 0, \tag{46}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi^\varepsilon \nabla c^\varepsilon\cdot\mathbf{v}^\varepsilon\xi dxdt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})(\nabla_x c(\mathbf{x},t)+\varepsilon\nabla_y C(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)+$$

$$+\nabla_y C(\mathbf{x},\frac{x}{\varepsilon},t))(\mathbf{v}(\mathbf{x},t)+\varepsilon\mathbf{V}(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)+\mathrm{K})\cdot\varepsilon\xi_0(\mathbf{x},t)\xi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt=0, \tag{47}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_T}\alpha_D\chi^\varepsilon\nabla c^\varepsilon\cdot\nabla\xi dxdt =$$

$$=\int_{\Omega_T}\alpha_D\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})(\nabla_x c(\mathbf{x},t)+\nabla_y C(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t)+\varepsilon\nabla_x C(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon},t))\times$$

$$\times(\varepsilon\nabla\xi_0(\mathbf{x},t)\nabla\xi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})+\xi_0(\mathbf{x},t)\nabla_y\xi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}))dxdt =$$

$$=\int_{\Omega_T}\left(\int_Y\alpha_D\chi(\mathbf{y})(\nabla_x c(\mathbf{x},t)+\nabla_y C(\mathbf{x},\mathbf{y},t))\cdot\nabla_y\xi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dy\right)\xi_0(\mathbf{x},t)dxdt, \tag{48}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^\varepsilon}\chi^\varepsilon c_0\xi\,|_{t=0}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^\varepsilon}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})c_0(\mathbf{x})\varepsilon\xi_0(\mathbf{x},0)\xi_1(\mathbf{y})dx. \tag{49}$$

После реинтегрирования получим микроскопическое уравнение переноса концентрации

$$\nabla_y\cdot(\nabla_x c+\nabla_y C)=0,\quad \mathbf{y}\in Y_f. \tag{50}$$

Таким образом,

$$m\nabla c+\langle\nabla_y C\rangle_{Y_f} = \mathbf{B}^{(c)}\nabla c = \left(m\mathbf{I}+(\sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_y C^{(i)}(\mathbf{y})\rangle_{Y_f}\otimes\mathbf{e}_i)\right)\nabla c$$

и

$$\mathbf{B}^{(c)} = m\mathbf{I}+(\sum_{i=1}^{2}\langle\nabla_y C^{(i)}(\mathbf{y})\rangle_{Y_f}\otimes\mathbf{e}_i) = m\mathbf{I}+\mathbf{B}_0. \tag{51}$$

Усредненное конвективное уравнение примет вид

$$m\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{B}^{(c)}\mathbf{v}\cdot\nabla c = \nabla\cdot(\alpha_D\mathbf{B}^{(c)}\nabla c). \tag{52}$$

Предельное давление p жидкости в области Ω^0 совпадает при $t > 0$ с гидростатическим давлением (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корректная разрешимость задачи о нелинейной диффузии в несжимаемой пороупругой среде на микроскопическом уровне / А. М. Мейрманов, Р. Н. Зимин, О. А. Гальцева, О. В. Гальцев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. – 2012. – № 5 (124), вып. 26. – С. 116–128.

2. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains / E. Acerbi, V. Chiado, G. Dal Maso, D. Percivale // Nonlinear Anal. – 1992. – Vol. 18. – P. 481–496.

3. Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in porous media: application to gas migration in a nuclear waste repository / B. Amaziane, S. Antontsev, L. Pankratov, A. Piatnitski // SIAM J. of Multiscale Model. Simul. – 2010. – Vol. 8, № 5. – P. 2023–2047.

4. Meirmanov, A. M. Some compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation / A. M. Meirmanov, R. Zimin // Electronic Journal of Differential Equations. – 2011. – Vol. 2011. – № 115. – P. 1–11.

REFERENCES

1. Meyrmanov A.M., Zimin R.N., Galtseva O.A., Galtsev O.V. Korrektnaya razreshimost zadachi o nelineynoy diffuzii v neszhimaemoy porouprugoy srede na mikroskopicheskom urovne [Correct Solvability of Nonlinear Diffusion in an Incompressible Poroelastic Media at the Microscopic Level]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika* [Scientific Bulletins of BelSU. Mathematics & Physics], 2012, no. 5 (124), vol. 26, pp. 116-128.

2. Acerbi E., Chiado V., Dal Maso G., Percivale D. An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains. *Nonlinear Anal*, 1992, vol. 18, pp. 481-496.

3. Amaziane B., Antontsev S., Pankratov L., Piatnitski A. Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in porous media: application to gas migration in a nuclear waste repository. *SIAM J. of Multiscale Model. Simul.*, 2010, vol. 8, no. 5, pp. 2023-2047.

4. Meirmanov A.M., Zimin R. Some compactness result for periodic structures and its application to the homogenization of a diffusion-convection equation. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2011, vol. 2011, no. 115, pp. 1-11.

HOMOGENIZATION OF THE PROBLEM OF ADMIXTURE DIFFUSION FROM A RESERVOIR INTO ABSOLUTELY HARD POROUS SOIL

Oksana Aleksandrovna Galtseva

Senior Lecturer, Department of Informatics, Natural Sciences and Teaching Methods,
Belgorod State National Research University
galtseva@bsu.edu.ru
Pobedy St., 85, 308015 Belgorod, Russian Federation

Abstract. The paper is devoted to the study of the initial-boundary value problem for a system of equations describing the motion of a viscous incompressible fluid in an absolutely rigid porous medium. The system under consideration is supplemented by the equation of admixture diffusion in pores of hard soil. The process is complicated by the motion in water reservoir. The admixture density depends on its concentration. Macroscopic analogs of the original microscopic equations are derived.

The process of admixture diffusion from a water reservoir into a porous soil is considered in the region Ω^0 (water reservoir) and Ω (porous medium), separated by the common boundary S^0. The fluid motion in Ω^0 for $t > 0$ is described by the stationary system of the Stokes equations and and fluid motion in the porous medium Ω is described by the continuity equation, by the balance equation and the admixture diffusion equation, where $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = (v_1(\mathbf{x},t), v_2(\mathbf{x},t))$ is the velosity of admixture, $p(\mathbf{x},t)$ – the pressure, $c^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)$ – the admixture concentration, $\mathbf{D}(x,\mathbf{v})$ – the stress tensor, $\mathbf{I}$ – the unit matrix, α_{μ} – the fluid viscosity and λ_D is the diffusion coefficient.

On the common boundary $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ for $t > 0$ we have continuously conditions that remain valid both for velocities and for normal stresses. The problem is closed by the Neumann boundary condition with appropriate boundary and initial conditions.

Definition. *A triple of functions* $\{\mathbf{v}^{\varepsilon}, c^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}\}$ is called a generalized solution of the problem, if it satisfies the continuity condition almost everywhere in Q_T, the boundary and initial conditions, and the integral identity

$$\int_{Q_T} ((\zeta \mathbf{P}_f + (1-\zeta)\mathbf{P}) : \mathbf{D}(x, \varphi) + \nabla \cdot (\varphi p^0) - \widetilde{\rho}(c) \mathrm{e} \cdot \varphi) dx dt = 0,$$

$$\widetilde{\rho}(c) = (\zeta + (1-\zeta)\chi_f^{\varepsilon})\rho_f.$$

for all φ such that $\varphi(x,t) = 0$ on the boundary S_T^2.

Theorem. *Let the functions* $\{\mathbf{v}^{\varepsilon}, p^{\varepsilon}, c^{\varepsilon}\}$ *be a generalized solution of the problem. Then:*

1) from the sequence $\{\varepsilon > 0\}$ one can select a subsequence such that for $\varepsilon \to 0$:

a) $\{\mathbf{v}^{\varepsilon}\}$ converges weakly to $\mathbf{v}$ in $L_2((0,T); L_2(Q))$;

b) $\{\nabla \cdot \mathbf{v}^{\varepsilon}\}$ converges weakly to $\nabla \cdot \mathbf{v}$ in $L_2((0,T); L_2(Q))$;

c) $\{p^{\varepsilon}\}$ converges weakly to p in $L_2((0,T); L_2(Q))$;

d) $\{c^{\varepsilon}\}$ converges weakly to the function c in $L_2((0,T); W_2^1(Q))$ and strongly in $L_2((0,T); L_2(Q))$;

2) the functions $\{\mathbf{v}, p, c\}$ are a generalized solution of the following problem:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(-\frac{1}{m}\nabla p + \rho(c)\mathbf{e}), \ \rho(c) = \left(\rho_f + \delta c\right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$m\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \alpha_D \nabla \cdot (\mathbf{B}^{(c)} \nabla c).$$

The problem will be called the homogenized model.

3) The limiting pressure p of the fluid in the domain Ω^0 coincides with hydrostatic pressure for $t > 0$

$$p(\mathbf{x}, t) = p^0(t) - \rho_f x_3 \equiv p_0(\mathbf{x}, t).$$

Key words: homogenization, Stokes equations, diffusion, convection-diffusion equation, asymptotic expansions method.