DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.6.2

УДК 517.547
ББК 22.162

ОЦЕНКИ МОДУЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ПОЛОСЕ ФУНКЦИИ

Ирина Владимировна Дзогий

Старший преподаватель кафедры автоматизированных информационных систем и технологий,
Брянский государственный университет им. академика И.Г. Петровского
mandragorass@yandex.ru
ул. Бежицкая, 16, 241036 г. Брянск, Российская Федерация

Аннотация. Получены оценки модуля аналитической в прямолинейной полосе функции при условии, что есть некоторая оценка убывания модуля функции на границе или части границы этой полосы. Найдено расширение класса функций, для которых справедливо утверждение теоремы Ю.И. Маслякова до класса И.И. Привалова для прямолинейной полосы.

Ключевые слова: модуль аналитической функции, правая полуплоскость, прямолинейная полоса, класс функций И.И. Привалова, ядро Пуассона.

Введение

В теории функций комплексных переменных известны роль и значения различных оценок модуля аналитических функций внутри области, если известна соответствующая оценка на границе или части границы этой области. Такие оценки возникали при появлении стройной теории функций комплексных переменных. Для этого достаточно вспомнить историю возникновения гармонической меры в теории потенциала или известных теорем типа Фрагмена – Линделефа. Оценки подобного рода играют существенную роль в приложениях теорий функций комплексных переменных. Для примера вспомним теорему Рисса – Торина или теорему об аналитических емкостях. В 1966 г. в журнале «Математический сборник» Ю.И. Масляковым был опубликован результат об оценках модуля аналитических функций внутри правой полуплоскости при условии, что есть некоторая оценка убывания модуля функции на мнимой оси [4]. Оказалось, что оценки такого рода справедливы не только для аналитических непрерывных вплоть до границы и ограниченных функций, но и для функций из классов И.И. Привалова [5], где на границе оценка «всюду» заменяется на оценку «почти всюду» и существенно расширяется класс функций, где справедлив такой результат (см.: [2; 7]). Аналогичные оценки для модуля функций из классов И.И. Привалова можно получить не только в правой полуплоскости, но и в единичном круге [1], и в прямолинейной полосе [6].

Основной результат

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в прямолинейной полосе $\Pi = \left\{ x + iy : |y| < \frac{\pi}{2} \right\}$, тогда:

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^{+}\left|f(x+iy)\right|dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f\left(t+i\frac{\pi}{2}\right)\right|e^{t}e^{x}\cos y dt}{\left(e^{t}-e^{x}\sin y\right)^{2}+e^{2x}\cos^{2}y}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f\left(t-i\frac{\pi}{2}\right)\right|e^{t}e^{x}\cos y dt}{\left(e^{t}+e^{x}\sin y\right)^{2}+e^{2x}\cos^{2}y},$$

где $r=|z|$, $ln^{+}a=\begin{cases}\ln a, при\, a>1;\\ 0,\ при\, 0<a\le 1.\end{cases}$

Доказательство. Функция $\tilde{f}(w)$, аналитическая в правой полуплоскости $\Pi^{+}=\{u+iv: u>0\}$, имеет оценку [2, с. 10]:

$$\ln\left|\tilde{f}(w)\right| \le 2\tilde{r}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^{+}\left|\tilde{f}\left(Re^{i\tilde{\theta}}\right)\right|d\tilde{\theta}+\frac{u}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|\tilde{f}(i\tilde{t})\right|}{\left(\tilde{t}-v\right)^{2}+u^{2}}d\tilde{t}, \tag{1}$$

где $|w|=\tilde{r}$.

Так как $-\infty<\tilde{t}<+\infty$, то последний интеграл в (1) примет вид:

$$\frac{u}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln\left|\tilde{f}(i\tilde{t})\right|}{\left(\tilde{t}-v\right)^{2}+u^{2}}d\tilde{t}+\frac{u}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln\left|\tilde{f}(-i\tilde{t})\right|}{\left(\tilde{t}+v\right)^{2}+u^{2}}d\tilde{t}, \tilde{t}>0. \tag{2}$$

Конформно отобразим $\Pi^{+}=\{u+iv: u>0\}$ на $\Pi=\left\{x+iy: |y|<\frac{\pi}{2}\right\}$ при помощи функции $\ln w=z$.

Делая замену $x=\ln|w|$, $y=\arg w$, $u=e^{x}\cos y$, $v=e^{x}\sin y$, $R=e^{x}$, $\theta=y$, имеем:

$$\ln\left|\tilde{f}(w)\right|=\ln\left|\tilde{f}\left(e^{z}\right)\right|=\ln\left|f(z)\right|,\ \ln\left|\tilde{f}(i\tilde{t})\right|=\ln\left|f\left(\ln|\tilde{t}|\pm i\frac{\pi}{2}\right)\right|.$$

Пусть

$$t=\ln|\tilde{t}|, \tilde{t}>0. \tag{3}$$

Из (3) получим $d\tilde{t}=e^{t}dt$, $-\infty<t<+\infty$.

Учитывая (2) и делая замену в (1), имеем:

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^{+}\left|f(x+iy)\right|dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f\left(t+i\frac{\pi}{2}\right)\right|e^{t}e^{x}\cos y dt}{\left(e^{t}-e^{x}\sin y\right)^{2}+e^{2x}\cos^{2}y}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f\left(t-i\frac{\pi}{2}\right)\right|e^{t}e^{x}\cos y dt}{\left(e^{t}+e^{x}\sin y\right)^{2}+e^{2x}\cos^{2}y}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $N_p(\Pi)$ класс аналитических в прямолинейной полосе $\Pi = \left\{ x + iy : |y| < \frac{\pi}{2} \right\}$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию:

1) $\sup\limits_{-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(ln^{+} \left| f\left(x + iy\right) \right| \right)^{p} e^{-x} dx \right\} < \infty,\ p > 0;$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^{+} \left| f\left(x + iy\right) \right| dy = 0.$

Такой класс функций называют классом И.И. Привалова в прямолинейной полосе.

Лемма 2. Если функция $f(z) \in N_p(\Pi)$, то

$$\ln\left|f(z)\right| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f\left(t + i\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{t} e^{x} \cos y dt}{\left(e^{t} - e^{x}\sin y\right)^{2} + e^{2x}\cos^{2} y} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f\left(t - i\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{t} e^{x} \cos y dt}{\left(e^{t} + e^{x}\sin y\right)^{2} + e^{2x}\cos^{2} y},$$

при всех $z \in \Pi = \left\{ x + iy : |y| < \frac{\pi}{2} \right\}$.

Доказательство. По лемме 1 функция $\ln\left|f(z)\right|$ имеет оценку:

$$\ln\left|f(z)\right| \le 2r \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^{+} \left| f\left(x + iy\right) \right| dy +$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f\left(t + i\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{t} e^{x} \cos y dt}{\left(e^{t} - e^{x}\sin y\right)^{2} + e^{2x}\cos^{2} y} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f\left(t - i\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{t} e^{x} \cos y dt}{\left(e^{t} + e^{x}\sin y\right)^{2} + e^{2x}\cos^{2} y}.$$

Так как $f(z) \in N_p(\Pi)$, то

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^{+} \left| f\left(x + iy\right) \right| dy = 0.$$

В результате справедливо следующее неравенство:

$$\ln\left|f(z)\right| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f\left(t + i\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{t} e^{x} \cos y dt}{\left(e^{t} - e^{x}\sin y\right)^{2} + e^{2x}\cos^{2} y} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\left|f\left(t - i\frac{\pi}{2}\right)\right| e^{t} e^{x} \cos y dt}{\left(e^{t} + e^{x}\sin y\right)^{2} + e^{2x}\cos^{2} y}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через ***B*** класс положительных, возрастающих, непрерывных функций $\varphi(t)$ на $[0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

а) $\varphi(e^{t})$ выпукла вниз при $t \ge 0$;

b) $\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)e^{-t}dt<+\infty$;

c) $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\varphi\left(e^t\right)}{t}=+\infty$.

Теорема 1. Пусть функция

$$\mathrm{f}(\mathrm{z})\in \mathrm{N}_{\mathrm{p}}(\Pi),\ \mathrm{p}>1,$$

и на границе Π почти всюду удовлетворяет условию

$$\left|\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right)\right|\le \mathrm{e}^{-\varphi(|\mathrm{x}|)},\ (-\infty<\mathrm{x}<+\infty), \tag{4}$$

где $\varphi(t)\in$B. Тогда всюду в Π справедлива оценка

$$\left|\mathrm{f}(z)\right|\le K\mathrm{e}^{-\varphi(|z|)},\ \mathrm{K}=\mathrm{e}^{\varphi(1)-\varphi(0)}.$$

Доказательство. По лемме 2

$$\ln\left|f(z)\right|\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f\left(t+i\frac{\pi}{2}\right)\right|e^te^x\cos y dt}{\left(e^t-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|f\left(t-i\frac{\pi}{2}\right)\right|e^te^x\cos y dt}{\left(e^t+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}.$$

Из условия (4) получим:

$$\ln\left|f(z)\right|\le-\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(|\mathrm{t}|)e^te^x\cos y dt}{\left(e^t-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(|\mathrm{t}|)e^te^x\cos y dt}{\left(e^t+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}\right]=$$

$$=-\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(|\mathrm{t}|)e^te^x\cos y dt}{\left(e^t-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(|\mathrm{t}|)e^te^x\cos y dt}{\left(e^t+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}\right]=$$

$$=-\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\mathrm{t})e^te^x\cos y dt}{\left(e^t-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\mathrm{t})e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t}-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\mathrm{t})e^te^x\cos y dt}{\left(e^t+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\varphi(\mathrm{t})e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t}+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}\right]. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию

$$m(s)=\max_{t\ge1}\frac{t^s}{e^{\varphi(t)}}.$$

Функция $m(s)$ определена при всех $s\ge0$, так как для таких s, в силу условий, наложенных на функцию φ, существует

$$\ln m(s) = \max_{t\geq 1}\left(s\ln t - \varphi(t)\right) = \max_{\tau\geq 0}\left(s\tau - \varphi\left(e^{\tau}\right)\right),$$

где $\ln m(s)$ является функцией, двойственной по Юнгу к функции $\varphi\left(e^{\tau}\right)$ [3, с. 186].

Заметим также, что функция $m(s)$ – возрастающая при $s \geq 0$ и

$$m(0) = e^{-\varphi(1)}. \tag{6}$$

По функции $m(s)$ построим функцию Карлемана – Островского:

$$T(t) = \max_{s\geq 0}\frac{t^s}{m(s)}.$$

Функция $T(t)$ существует для любого $t \geq 1$, так как существует

$$\ln T(t) = \max_{s\geq 0}\left(s\ln t - \ln m(s)\right).$$

Функция $\ln T\left(e^{\tau}\right)$ – двойственная по Юнгу к функции $\ln m(s)$, поэтому $\ln T(t)$ существует для всех $t \geq 1$ [3, с. 186].

Рассмотрим случай, когда $0 \leq t < 1$. При этих значениях функция $T(t)$ тоже определена, так как в этом случае с ростом s функция $\dfrac{t^s}{m(s)}$ убывает, следовательно, $T(t) = \dfrac{1}{m(0)}$ $(0 \leq t < 1)$. Учитывая соотношение (6), имеем

$$T(t) = e^{\varphi(1)},\ 0 \leq t < 1. \tag{7}$$

Принимая во внимание, что $\varphi\left(e^{\tau}\right)$ выпукла вниз, получаем [3, с. 187]

$$\varphi\left(e^{\tau}\right) \equiv \ln T\left(e^{\tau}\right), \tau \geq 0,$$

откуда

$$e^{\varphi(t)} \equiv T(t),\ t \geq 1. \tag{8}$$

Рассмотрим отрезок $0 \leq t \leq 1$. В силу (7) и условий, наложенных на $\varphi(t)$, справедливо соотношение

$$e^{\varphi(t)} \leq e^{\varphi(1)} = T(t).$$

Также для этого отрезка верно неравенство $e^{\varphi(t)} \geq e^{\varphi(0)}$, откуда

$$e^{\varphi(t)} \geq \frac{e^{\varphi(0)}e^{\varphi(1)}}{e^{\varphi(1)}} = e^{\varphi(0)-\varphi(1)}T(t) = K_1T(t),\ K_1 = e^{\varphi(0)-\varphi(1)}. \tag{9}$$

Замечая, что $K_1 \leq 1$, и учитывая (8) и (9), имеем

$$e^{\varphi(t)} \geq K_1T(t),\ t \geq 0. \tag{10}$$

Пусть s_0 – неотрицательное число, такое, что

$$\frac{r^{s_0}}{m(s_0)} = T(r). \tag{11}$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части неравенства (5).

Из соотношений (10) и (11) получаем:

$$\ln\left|f(z)\right| \le -\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(K_1\frac{t^{s_0}}{m(s_0)}\right)e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(K_1\frac{t^{s_0}}{m(s_0)}\right)e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t} - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(K_1\frac{t^{s_0}}{m(s_0)}\right)e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t + e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(K_1\frac{t^{s_0}}{m(s_0)}\right)e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t} + e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y}\right] =$$

$$= -\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t} - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t + e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t} + e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s_0\ln t e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s_0\ln t e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t} - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s_0\ln t e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t + e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{s_0\ln t e^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t} + e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y}\right].$$

Полученные 8 интегралов обозначим через $I_i, i = \overline{1,8}$.

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}e^t e^x\cos y dt}{\left(e^t - e^x\sin y\right)^2 + e^{2x}\cos^2 y} = \frac{\ln\frac{K_1}{m(s_0)}}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{d\left(\frac{e^t - e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)}{\left(\frac{e^t - e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\ln\frac{K_1}{m(s_0)}arctg\left(\frac{e^t - e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{K_1}{m(s_0)}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1 - e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)\right).$$

Учитывая, что интегралы I_2, I_3, I_4 вычисляются аналогично I_1 и $arctg(t)$ – функция нечетная, получим:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{\pi}\ln\frac{K_1}{m(s_0)}\left[\frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1 - e^x\sin y}{e^x\cos y}\right) + arctg\left(\frac{e^x\sin y}{e^x\cos y}\right) + arctg\left(\frac{1 - e^x\sin y}{e^x\cos y}\right) + \right.$$

$$+\ \frac{\pi}{2}-arctg\left(\frac{1+e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)-arctg\left(\frac{e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)+arctg\left(\frac{1+e^x\sin y}{e^x\cos y}\right)\Bigg]=\ln K_1-\ln m\left(s_0\right).$$

Найдем оставшиеся четыре интеграла. Пусть $\hat{I}=I_5+I_6+I_7+I_8$.

Рассмотрим функцию

$$f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2+\left(\left|y\right|-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)=\ln\left(x^2+y^2-\pi\left|y\right|+\frac{\pi^2}{4}\right).$$

Это гармоническая функция в $\Pi=\left\{x+iy:\left|y\right|<\frac{\pi}{2}\right\}$, так как:

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}},\quad \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{2y\mp\pi}{x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}},$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}\right)-4x^2}{\left(x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}\right)^2},\quad \frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial y^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}\right)-\left(2y\mp\pi\right)^2}{\left(x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f\left(x,y\right)}{\partial y^2}=\frac{4x^2+4y^2\mp4\pi y+\pi^{2-}4x^2-4y^2\pm4\pi y-\pi^2}{\left(x^2+y^2\mp\pi y+\frac{\pi^2}{4}\right)^2}=0\ .$$

На границе полосы $\Pi=\left\{x+iy:\left|y\right|<\frac{\pi}{2}\right\}$ функция $f\left(x,y\right)=\ln\left(x^2+\left(\left|y\right|-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$ равна $ln(t^2+0)=2ln\,|\,t\,|$.

Представим функцию $\ln\left(x^2+y^2-\pi\left|y\right|+\frac{\pi^2}{4}\right)=\ln\left(r^2-\pi\left|y\right|+\frac{\pi^2}{4}\right)$, где $r^2=x^2+y^2$, через ядро Пуассона, предварительно умножив на $\frac{s_0}{2}$:

$$\frac{s_0}{2}\ln\left(r^2-\pi\left|y\right|+\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_0\ln\left|t\right|e^te^x\cos y dt}{\left(e^t-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s_0\ln\left|t\right|e^te^x\cos y dt}{\left(e^t+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{s_0\ln te^te^x\cos y dt}{\left(e^t-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{s_0\ln te^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t}-e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{s_0\ln te^te^x\cos y dt}{\left(e^t+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{s_0\ln te^{-t}e^x\cos y dt}{\left(e^{-t}+e^x\sin y\right)^2+e^{2x}\cos^2 y}=I_5+I_6+I_7+I_8=\hat{I}.$$

Так как

$$\ln\left|f\left(z\right)\right|\le-\left[I_1+I_2+I_3+I_4+\hat{I}\right],$$

то

$$\ln\left|f(z)\right| \le -\left[\ln K_1 - \ln m(s_0) + \ln\left(x^2 + \left(\left|y\right| - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{\frac{s_0}{2}}\right].$$

В силу справедливости неравенства

$$\frac{s_0}{2}\ln\left(x^2 + \left(\left|y\right| - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) \ge \frac{s_0}{2}\ln\left(x^2 + \left(\left|\frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \ln\left|x\right|^{s_0}$$

получаем:

$$\ln\left|f(z)\right| \le -\left[\ln K_1 + \ln\frac{r^{s_0}}{m(s_0)}\right],$$

откуда следует неравенство $\left|f(z)\right| \le K e^{-\varphi(|z|)}$, $K = e^{\varphi(1)-\varphi(0)}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзогий, И. В. О некоторых оценках в одном пространстве аналитических в единичном круге функций / И. В. Дзогий // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – М., 2015. – № 2-1. – С. 21–24.
2. Дзогий, И. В. Оценки модуля аналитической в полуплоскости функции / И. В. Дзогий // Интеллектуальные системы в производстве. – Ижевск : Ижев. гос. техн. ун-т им. М.Т. Калашникова, 2016. – № 4 (31). – С. 8–12.
3. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М. : Физматгиз, 1962. – 200 с.
4. Масляков, Ю. И. Об убывании функций, аналитических в полуплоскости / Ю. И. Масляков // Математический сборник. – 1966. – Т. 69, № 4. – С. 658–662.
5. Привалов, И. И. Граничные значения однозначных аналитических функций / И. И. Привалов. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1950. – 336 с.
6. Шамоян, Ф. А. О некоторых оценках в одном пространстве аналитических в прямолинейной полосе функций / Ф. А. Шамоян, И. В. Щербенко // Сборник студенческих научных работ БГУ : тез. докл. – Брянск : Изд-во БГУ, 2003. – С. 12–13.
7. Щербенко, И. В. О некоторых оценках в одном пространстве аналитических в полуплоскости функций / И. В. Щербенко, Е. В. Яшина // Материалы Воронежской весенней математической школы. Современные методы теории краевых задач. – Воронеж, 2003. – С. 161–162.

REFERENCES

1. Dzogiy I.V. O nekotorykh otsenkakh v odnom prostranstve analiticheskikh v edinichnom kruge funktsiy [On Some Estimates in a Single Space of Functions Analytic in the Unit Circle]. *Aktualnye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk* [Current Problems of the Humanities and Natural Sciences]. Moscow, 2015, no. 2-1, pp. 21-24.
2. Dzogiy I.V. Otsenki modulya analiticheskoy v poluploskosti funktsii [Estimates of the Modulus of a Function Analytic in the Half-Plane]. *Intellektualnye sistemy v proizvodstve* [Intellectual Systems in Production]. Izhevsk, Izhev. gos. tekhn. un-t im. M.T. Kalashnikova, 2016, no. 4 (31), pp. 8-12.
3. Evgrafov M.A. *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic Estimates and Entire Functions]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 200 p.
4. Maslyakov Yu.I. Ob ubyvanii funktsiy, analiticheskikh v poluploskosti [On the Decrease of Functions Analytic in the Half-Plane]. *Matematicheskiy sbornik*, 1966, vol. 69, no. 4, pp. 658-662.

5. Privalov I.I. *Granichnye znacheniya odnoznachnykh analiticheskikh funktsiy* [Boundary Values of Single-Valued Analytic Functions]. Moscow; Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 336 p.

6. Shamoyan F.A., Shcherbenko I.V. O nekotorykh otsenkakh v odnom prostranstve analiticheskikh v pryamolineynoy polose funktsiy [On Some Estimates in a Space of Functions Analytic in a Rectilinear Strip]. *Sbornik studencheskikh nauchnykh rabot BGU: tez. dokl.* [Proceedings of Student Scientific Works of BSU. Report Thesis]. Bryansk, Izd-vo BGU, 2003, pp. 12-13.

7. Shcherbenko I.V., Yashina E.V. O nekotorykh otsenkakh v odnom prostranstve analiticheskikh v poluploskosti funktsiy [On Some Estimates in a Space of Functions Analytic in the Half-Plane]. *Materialy Voronezhskoy vesenney matematicheskoy shkoly. Sovremennye metody teorii kraevykh zadach* [Proceedings of the Voronezh Spring Mathematical School. Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems]. Voronezh, 2003, pp. 161-162.

ESTIMATING THE MODULE FUNCTION WHICH IS ANALYTIC AT RECTILINEAR STRIP

Irina Vladimirovna Dzogiy

Senior Lecturer, Department of Automated Information Systems and Technologies,
Bryansk State University named after I.G. Petrovskiy
mandragorass@yandex.ru
Bezhitskaya St., 16, 241036 Bryansk, Russian Federation

Abstract. The complex analysis of the role and values of analytic function's estimates is carried out within the range if a respective estimate is known at the boundary or part of the boundary of this area. Such estimations play a significant role in the applications of the theories of the functions of complex variables. It is enough to recall the Riesz – Thorin theorem or the theorem of analytical capacity. In 1966 Yu.I. Maslyakov published the results of estimations of the analytical function module inside the right half-plane, provided that there was some estimate of decreasing the function module' on the conjugate axis (see [4]). It has been found that the estimates of this kind are fair not only for analytical continuous up to the border and limited functions, but also for functions from the classes of I.I. Privalov (see [5]), where at the border the estimate of 'everywhere' is replaced by "almost everywhere" and the class of functions is significantly expanded, where the result is fair (see [2; 7]). Similar estimates for the module of functions of I.I. Privalov can be obtained not only in the right half-plane, but also in a single circle (see [1]), and in a straight lane (see [6]).

Classification through $N_p\left(\Pi\right)$, the analytical class in a straight lane of functions $\Pi = \left\{ x+iy : \left|y\right| < \frac{\pi}{2} \right\}$ satisfies the condition:

1) $\sup\limits_{-\frac{\pi}{2}<y<+\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(ln^+ \left| f\left(x+iy\right) \right| \right)^p e^{-x} dx \right\} < \infty$, $p > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} ln^+ \left| f\left(x+iy\right) \right| dy = 0$,

where $\ln^+ a = \begin{cases} \ln a, \text{ at } a > 1; \\ 0, \text{ at } 0 < a \le 1. \end{cases}$

This function class is called the class of I.I. Privalov in a straight lane.

Classification through "B" class of positive, increasing, continuous functions $\varphi(t)$ at $[0,+\infty)$ meets the conditions:

a) $\varphi(e^t)$ convex down at $t \geq 0$;

b) $\int_0^\infty \varphi(t) e^{-t} dt < +\infty$;

c) $\lim_{t\to+\infty} \frac{\varphi(e^t)}{t} = +\infty$.

Theorem 1.

Let the function $f(z) \in N_p(\Pi)$, $p > 1$, and at the border of Π almost everywhere satisfy the condition

$$\left| f\left(x \pm i\frac{\pi}{2} \right) \right| \leq e^{-\varphi(|x|)}, \ (-\infty < x < +\infty).$$

where $\varphi(t) \epsilon B$.

Then everywhere in П the following equation is valid

$$\left| f(z) \right| \leq K e^{-\varphi(|z|)}, \ K = e^{\varphi(1)-\varphi(0)}.$$

Key words: module of analytic function, right half-plane, rectilinear strip, function class of I.I. Privalov, Poisson's kernel.