МАТЕМАТИКА

ТРУДЫ СЕМИНАРА-СОВЕЩАНИЯ «СЕТИ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ»

УДК 517.518.85+517.53+517.538.5
ББК 22.161.6

C^1-АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

А.В. Болучевская

В работе рассматривается задача кусочно-гладкой аппроксимации отображений, являющихся решением эллиптической системы уравнений, и аппроксимации их дифференциалов по значениям в узлах треугольной сетки. Показано, что при аппроксимации дифференциалов таких отображений дифференциалами приближающих отображений имеет место зависимость погрешности аппроксимации от геометрических характеристик треугольников в сети. Построено отображение, приближающее дифференциал с погрешностью, независящей от степени вырожденности треугольников. Аналогичные результаты получены для отображений, аппроксимирующих дифференциал решения уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: *кусочно-гладкая аппроксимация, аппроксимация дифференциала, эллиптическая система уравнений, уравнение Бельтрами, погрешность аппроксимации, триангуляция.*

1. Постановка задачи

Задача аппроксимации функций различных классов и их производных является одной из важнейших и активно исследуемых областей математики. В данной работе, в частности, будет рассмотрена кусочно-гладкая аппроксимация решений эллиптических систем, заданных на нерегулярных треугольных сетках, а также аппроксимация дифференциалов таких решений.

Необходимо отметить, что особенно важным в подобных задачах является оценка погрешности аппроксимации производных, поскольку в подавляющем большинстве случаев эта погрешность зависит от формы треугольников сети (как правило, от максимального или минимального углов). Эта зависимость от углов треугольника в свою очередь сильно затрудняет построение сеток, поскольку присутствие «плохих» треугольников, чьи углы не удовлетворяют определенным условиям, может привести к отсутствию сходимости производных вообще.

Поэтому при изучении кусочно-гладких аппроксимаций решений эллиптических систем определенного вида возникла следующая задача. Проверить, верно ли, что погрешность аппроксимации дифференциалов таких отображений дифференциалами приближающих отображений зависит от углов треугольников сети, и, в случае утвердительного ответа, построить отображение, приближающее дифференциал, но с погрешностью, независящей от триангуляции.

Перейдем теперь к точным формулировкам.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек.

Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию T_m [5, с. 32]. Для всякого треугольника $S \in T_m$ определим длину d_S максимальной его стороны. Положим

$$d_m = \max_{S \in T_m} d_S.$$

Будем рассматривать такие наборы точек P_m и их триангуляции T_m, для которых

$$d_m \to 0 \text{ при } m \to \infty \tag{1}$$

и

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall m > m_0 \, \forall x \in D \, \exists a \in P_m \text{ такая, что } |a - x| < \varepsilon. \tag{2}$$

Условие (2) означает, что P_m является ε-сетью при всех достаточно больших m.

Пусть $f(x)\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^2$ — отображение вида $f(x) = (U(x), V(x))$, $x = (x_1, x_2)$, где $U(x), V(x) \in C^2(D)$ являются решениями эллиптической системы уравнений [4, с. 176]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x) = -\alpha_2(x) \dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x), \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x) = \alpha_1(x) \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x), \end{cases} \tag{3}$$

а $\alpha_1(x), \alpha_2(x) \in C^1(D)$, $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) > 0 \, \forall x \in D$ — условие эллиптичности.

Для всякого натурального m построим приближающее отображение $f_m(x)\colon D \to$ $\to D^*$, $f_m(x) = (U_m(x),\, V_m(x))$ такое, что $U_m(x), V_m(x) \in C^1(D)$ и

$$f_m(a) = f(a) \text{ для любой точки } a \in P_m.$$

Для всякого $x \in D$ рассмотрим дифференциалы отображений $f(x)$ и $f_m(x)$:

$$df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x) \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \quad df_m(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial U_m}{\partial x_2}(x) \\ \dfrac{\partial V_m}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial V_m}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}.$$

Построим пример, который покажет, что при приближении отображения df отображением df_m погрешность зависит от степени вырожденности треугольников сети.

Пример 1. Рассмотрим отображение

$$f(x) = (U(x), V(x)) = (x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2)$$
$$(\text{или } f(z) = z^2,\ z \in \mathbb{C})$$

и область

$$D = \{(x_1, x_2)\colon 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1\}.$$

Заметим, что это отображение удовлетворяет системе Коши — Римана, которая получается из системы (3) при $\alpha_1(x) \equiv 1, \alpha_2(x) \equiv 1$ всюду в D.

Разделим область D на k одинаковых прямоугольников отрезками, параллельными оси абсцисс, и на n одинаковых прямоугольников отрезками, параллельными оси ординат. Построим триангуляцию, которая отображена на рисунке 1.

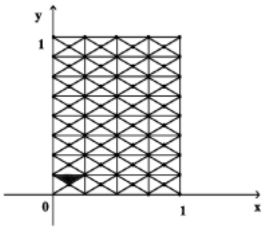

Рис. 1. Триангуляция в примере 1

В полученной триангуляции рассмотрим, например, треугольник с вершинами $p_0 = (0, \frac{1}{k}), p_1 = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2k}), p_2 = (\frac{1}{n}, \frac{1}{k})$ (на рис.1 он закрашен черным цветом). Для данного треугольника по этим трем точкам построим приближающее кусочно-линейное отображение $f_m(x)$.

Тогда в полученном треугольнике функции $U_m(x), V_m(x)$ задаются уравнениями

$$U_m(x) = \frac{1}{n}x_1 + \left(\frac{k}{2n^2} - \frac{3}{2k}\right)x_2 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2k^2},$$
$$V_m(x) = \frac{2}{k}x_1 + \frac{1}{n}x_2 - \frac{1}{nk}.$$

Возьмем, например, внутреннюю точку треугольника $P = (\frac{1}{2n}, \frac{3}{4k})$. Следовательно,

$$df(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{3}{2k} \\ \frac{3}{2k} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

и

$$df_m(P) = df_m(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{k}{2n^2} - \frac{3}{2k} \\ \frac{2}{k} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e = \| df(P) - df_m(P) \| \le \left|\frac{3}{k}\right| + \left|\frac{k}{2n^2}\right| + \left|\frac{1}{2k}\right|.$$

Ясно, что при $n, k \to \infty$ величина e стремится к нулю только если $\frac{k}{n^2} \to 0$. Таким образом, при k, равном, например, n^3, дифференциал отображения f_m не может аппроксимировать дифференциал отображения f.

Следовательно, возникает следующая задача. Для всякого $S \in T_m$ требуется построить матрицу $A_m(x)$, $x \in S$, аппроксимирующую $df(x)$, и оценить погрешность аппроксимации вида

$$e(S) = \sup_{x \in S} \| \, df(x) - A_m(x) \, \| \, .$$

Предполагается, что эта погрешность не должна зависеть от степени вырожденности треугольников.

2. Оценка погрешности

Пусть в D задана прямоугольная декартова система координат. Для всякого m рассмотрим треугольник $S \in T_m$. Если l — направление наибольшей стороны треугольника, φ — меньший из двух углов между этой стороной и осью абсцисс и

$$K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \frac{\alpha_2(x)\cos\varphi}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}, \quad K_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \frac{\sin\varphi}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi},$$
$$K_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \alpha_1(x) K_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi), \qquad K_4(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = -\alpha_1(x)\alpha_2(x) K_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi),$$
$$K_5(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = -\frac{1}{\alpha_2(x)} K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi), \qquad K_6(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \alpha_1(x) K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi),$$

то верна следующая теорема.

Теорема 1. *Если $\forall x \in S$ элементы матрицы $A_m(x) = (a_{ij})$ имеют следующий вид:*

$$a_{11} = K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x),$$
$$a_{12} = K_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_4(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x),$$
$$a_{21} = K_5(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x),$$
$$a_{22} = K_6(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x),$$

то справедлива оценка:

$$e(S) \le M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta} + M_3\big(\omega_1(d_m) + l_1(d_m)\big) + M_4\big(\omega_2(d_m) + l_2(d_m)\big),$$

где $\omega_1(t), \omega_2(t)$ — модули непрерывности градиентов функций $U_m(x), V_m(x)$ соответственно,

$$l_1(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega_1(t)dt, \quad l_2(d_m) = \frac{1}{d_m}\int\limits_0^{d_m} \omega_2(t)dt$$

и $\alpha = \alpha(\alpha_1, \alpha_2) > 0, \beta = \beta(\alpha_1, \alpha_2) > 0, d = dist(S, \partial D), M_1 = M_1(\alpha_1, \alpha_2, U, \, d, diamD, \varphi), M_2 = M_2(\alpha_1, \alpha_2, V, d, \, diamD, \varphi), M_3 = M_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi), M_4 = M_4(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы использовались идеи, предложенные в работе [3].

Обозначим вершины S как p_0, p_1, p_2, так, чтобы точки p_0 и p_1 образовывали максимальную сторону.

Для всякого $x \in S$ имеем

$$\begin{aligned} &U_m(p_i) = U(p_i),\\ &V_m(p_i) = V(p_i), \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Преобразуем систему координат путем переноса ее в точку p_0 и поворота против часовой стрелки на угол φ следующим образом:

$$\begin{cases} X_1 = (x_1 - x_1^0)\cos\varphi + (x_2 - x_2^0)\sin\varphi,\\ X_2 = -(x_1 - x_1^0)\sin\varphi + (x_2 - x_2^0)\cos\varphi, \end{cases} \tag{5}$$

где (X_1, X_2) — новые координаты точки x, $p_0 = (x_1^0, x_2^0)$.

Тогда $U(x) = U(x_1(X_1, X_2), x_2(X_1, X_2))$ и коэффициенты матрицы $A_m(x)$ преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) & a_{12} &= L_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\\ a_{21} &= \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) & a_{22} &= L_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) &= \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi},\\ L_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) &= -\frac{1}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi},\\ L_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) &= \frac{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}. \end{aligned}$$

А система (3) примет вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial X_1}(x) = \lambda_1(x)\dfrac{\partial U}{\partial X_1}(x) + \lambda_2(x)\dfrac{\partial U}{\partial X_2}(x),\\ \dfrac{\partial V}{\partial X_2}(x) = \lambda_3(x)\dfrac{\partial U}{\partial X_1}(x) + \lambda_1(x)\dfrac{\partial U}{\partial X_2}(x), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \sin\varphi\cos\varphi\,(\alpha_2(x) - \alpha_1(x)),\\ \lambda_2(x) &= \alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi,\\ \lambda_3(x) &= \alpha_1(x)\cos^2\varphi + \alpha_2(x)\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку функции $U(x), V(x), U_m(x), V_m(x) \in C^1(D)$, то, согласно (4), получим

$$\begin{cases} U_m(p_0) + \langle \nabla U_m(p_0), p_i - p_0\rangle + \xi_1(p_i - p_0) = U(p_0) + \langle \nabla U(p_0), p_i - p_0\rangle + r_1(p_i - p_0),\\ V_m(p_0) + \langle \nabla V_m(p_0), p_i - p_0\rangle + \xi_2(p_i - p_0) = V(p_0) + \langle \nabla V(p_0), p_i - p_0\rangle + r_2(p_i - p_0), \end{cases}$$

где $r_1(p_i - p_0), r_2(p_i - p_0), \xi_1(p_i - p_0), \xi_2(p_i - p_0)$ — остаточные члены.

Раскладывая векторы $\nabla U_m(p_0) - \nabla U(p_0)$, $\nabla V_m(p_0) - \nabla V(p_0)$, $p_i - p_0$ по базису, образованному в результате поворота системы координат, будем иметь

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) - \dfrac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right)(X_1^i - X_1^0) + \left(\dfrac{\partial U_m}{\partial X_2}(x) - \dfrac{\partial U}{\partial X_2}(p_0)\right)(X_2^i - X_2^0) = \\ \qquad = r_1(p_i - p_0) - \xi_1(p_i - p_0), \\ \left(\dfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) - \dfrac{\partial V}{\partial X_1}(p_0)\right)(X_1^i - X_1^0) + \left(\dfrac{\partial V_m}{\partial X_2}(x) - \dfrac{\partial V}{\partial X_2}(p_0)\right)(X_2^i - X_2^0) = \\ \qquad = r_2(p_i - p_0) - \xi_2(p_i - p_0), \end{cases}$$

где $p_i = (X_1^i, X_2^i), i = 0, 1, 2$.

Поскольку $X_1^0 = X_2^0 = 0$ и $X_2^1 = 0$, то при $i = 1$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0) - \dfrac{\partial U}{\partial X_1}(p_0) = \dfrac{r_1(p_1 - p_0) - \xi_1(p_1 - p_0)}{X_1^1}, \\ \dfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(p_0) - \dfrac{\partial V}{\partial X_1}(p_0) = \dfrac{r_2(p_1 - p_0) - \xi_2(p_1 - p_0)}{X_1^1}. \end{cases} \tag{7}$$

Система (3) является эллиптической в D. Следовательно, дифференцируя первое уравнение системы по x_2, второе — по x_1 и складывая уравнения, получим, что $U(x)$ удовлетворяет следующему эллиптическому уравнению второго порядка [2, с. 11]

$$\alpha_1(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x) + \alpha_2(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x)\frac{\partial U}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(x)\frac{\partial U}{\partial x_2}(x) = 0. \tag{8}$$

Пусть $t \in [0, 1]$. Тогда получим

$$\nabla U(p_0 + t(x - p_0)) - \nabla U(p_0) = R(p_0 + t(x - p_0)),$$

где, в силу эллиптичности (8), функция $R(p_0 + t(x - p_0))$ удовлетворяет условию

$$\Big|R(p_0 + t(x - p_0))\Big| \le C_1 d^{-\alpha} |t(x - p_0)|^{\alpha},$$

где $C_1 = C_1(\alpha_1, \alpha_2, U, d, diamD)$ [2, с. 297].

Полученное равенство умножим скалярно на вектор $x - p_0$ и проинтегрируем по t. Тогда имеем

$$U(x) - U(p_0) = \langle \nabla U(p_0), x - p_0 \rangle + \int_0^1 \langle R(p_0 + t(x - p_0)), x - p_0 \rangle dt.$$

Откуда, учитывая условие на $|R(p_0 + t(x - p_0))|$,

$$|U(x) - U(p_0) - \langle \nabla U(p_0), x - p_0 \rangle| \le C_1 d^{-\alpha} \frac{|x - p_0|^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \le C_1 d^{-\alpha} \frac{d_S^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Теперь через $\omega_1(t)$ обозначим модуль непрерывности градиента функции $U_m(x)$. Так, $\forall y_1, y_2 \in D$ выполнено

$$|\nabla U_m(y_1) - \nabla U_m(y_2)| \le \omega_1(|y_1 - y_2|).$$

Следовательно,

$$\frac{|\xi_1(p_1-p_0)|}{|p_1-p_0|}=\frac{|U_m(p_1)-U_m(p_0)-\langle\nabla U_m(p_0),p_1-p_0\rangle|}{|p_1-p_0|}\le l_1(d_S),$$

где $l_1(d_S)=\frac{1}{d_S}\int\limits_0^{d_S}\omega_1(t)dt$.

Тогда из (7) получаем

$$\left|\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right|\le\frac{|r_1(p_1-p_0)|}{d_S}+\frac{|\xi(p_1-p_0)|}{d_S}\le C_1d^{-\alpha}\frac{d_S^\alpha}{\alpha+1}+l_1(d_S).$$

Также, ввиду эллиптичности (8), для всех $x\in S$ можем оценить

$$\left|\frac{\partial U}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right|\le C_1d^{-\alpha}|x-p_0|^\alpha\le C_1d^{-\alpha}d_S^\alpha.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial U}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)\right|\le\left|\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)\right|+\left|\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right|+$$
$$+\left|\frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)-\frac{\partial U}{\partial X_1}(x)\right|\le\omega_1(d_S)+l_1(d_S)+\frac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1d^{-\alpha}d_S^\alpha.$$

Поскольку функция $V(x)$ также удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\frac{1}{\alpha_2}(x)\frac{\partial^2V}{\partial x_1^2}(x)+\frac{1}{\alpha_1}(x)\frac{\partial^2V}{\partial x_2^2}(x)+\frac{\partial\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)}{\partial x_1}(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)}{\partial x_2}(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x)=0,$$

то, проведя аналогичные рассуждения и обозначая $\omega_2(t)$ — модуль непрерывности градиента функции $V_m(x)$, имеем

$$\frac{|\xi_2(p_1-p_0)|}{|p_1-p_0|}\le l_2(d_S),$$

где $l_2(d_S)=\frac{1}{d_S}\int\limits_0^{d_S}\omega_2(t)dt$.

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial V}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right|\le\omega_2(d_S)+l_2(d_S)+\frac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}d_S^\beta,$$

где $C_2=C_2(\alpha_1,\alpha_2,V,d,diamD)$.

Обозначим

$$q_1=\omega_1(d_S)+l_1(d_S)+\frac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1d^{-\alpha}d_S^\alpha,$$
$$q_2=\omega_2(d_S)+l_2(d_S)+\frac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}d_S^\beta.$$

Теперь из системы (6) и уже полученных оценок имеем:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial X_2}(x)-\left(L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)+L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right)\right|\le$$
$$\le \left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|q_1+\left|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|q_2,$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial X_2}(x)-\left(L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)+L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right)\right|\le$$
$$\le \left|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|q_1+\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|q_2.$$

Отсюда, полагая, что $\parallel A\parallel=(a_{ij})=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|$, для всех $x\in S$ получим

$$\begin{aligned}\parallel df(x)-A_m(x)\parallel \le\ & d_m^\alpha\frac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1d^{-\alpha}\left(1+\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\left|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|\right)+\\ &+d_m^\beta\frac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}\left(1+\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\left|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|\right)+\\ &+\left(\omega_1(d_S)+l_1(d_S)\right)\left(1+\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\left|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|\right)+\\ &+\left(\omega_2(d_S)+l_2(d_S)\right)\left(1+\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\left|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|\right).\end{aligned}$$

Учитывая монотонность функции

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau\omega(t)dt,$$

получим

$$l_1(d_S)\le l_1(d_m),$$
$$l_2(d_S)\le l_2(d_m).$$

Далее, обозначая

$$M_1=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1d^{-\alpha}\left(1+\sup_{x\in S}\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\sup_{x\in S}\left|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|\right),$$
$$M_2=\frac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}\left(1+\sup_{x\in S}\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\sup_{x\in S}\left|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|\right),$$
$$M_3=1+\sup_{x\in S}\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\sup_{x\in S}\left|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|,$$
$$M_4=1+\sup_{x\in S}\left|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|+\sup_{x\in S}\left|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\right|,$$

получаем требуемое.

Следствие 1. *Пусть в области $D\subset\mathbb{R}^2$ задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^\infty$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m. Тогда, если выполнены условия* (1), (2) *и $G\subset\subset D$ — произвольная компактно вложенная подобласть, то*

$$\max_{S\in T_m,S\subset G}e(S)=\max_{S\in T_m,S\subset G}\sup_{x\in S}\parallel df(x)-A_m(x)\parallel\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

3. Оценка погрешности для уравнения Бельтрами

Пусть теперь D — область в $\mathbb{C}$, в которой задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m. Предположим также, что выполнены условия (1) и (2).

Пусть $f(z)$ — определенная в D комплекснозначная функция вида

$$f(z) = U(x_1, x_2) + iV(x_1, x_2),\ z = x_1 + ix_2 \in D,\\ U(x_1, x_2), V(x_1, x_2) \in C^2(D),$$

удовлетворяющая уравнению Бельтрами [1, с. 80]

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z),$$

где $\mu(z)$ — измеримая функция, $|\mu(z)| < 1$ п.в., $\mu(z) = \mu_1(x_1, x_2) + i\mu_2(x_1, x_2),\ \mu_1(x_1, x_2),$ $\mu_2(x_1, x_2) \in C^1(D),\ z \in D$ и

$$f_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) + i\frac{\partial f}{\partial x_2}(z)\right),$$
$$f_z(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) - i\frac{\partial f}{\partial x_2}(z)\right).$$

То есть f — квазиконформное отображение с комплексным отклонением μ.

Для всякого m построим приближающую функцию $f_m(z) = U_m(x_1, x_2) + iV_m(x_1, x_2)$ такую, что $U_m(x_1, x_2), V_m(x_1, x_2) \in C^1(D)$ и

$$f_m(a) = f(a) \text{ для любой точки } a \in P_m.$$

Рассматривая $f(z)$ как отображение $(U(x_1, x_2), V(x_1, x_2))$, обозначим

$$df(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что уравнение Бельтрами приводится к эллиптической системе

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) = h_1(x_1, x_2)\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) + h_2(x_1, x_2)\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) = h_3(x_1, x_2)\dfrac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) + h_1(x_1, x_2)\dfrac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2), \end{cases} \tag{9}$$

где

$$h_1(x_1, x_2) = -\frac{2\mu_1(x_1, x_2)}{1 - \mu_1^2(x_1, x_2) - \mu_2^2(x_1, x_2)},$$
$$h_2(x_1, x_2) = \frac{1 + 2\mu_1(x_1, x_2) + \mu_1^2(x_1, x_2) + \mu_2^2(x_1, x_2)}{1 - \mu_1^2(x_1, x_2) - \mu_2^2(x_1, x_2)},$$
$$h_3(x_1, x_2) = \frac{1 - 2\mu_1(x_1, x_2) + \mu_1^2(x_1, x_2) + \mu_2^2(x_1, x_2)}{1 - \mu_1^2(x_1, x_2) - \mu_2^2(x_1, x_2)}.$$

Эта система является более общим случаем системы (3). Поэтому для $f(z)$ справедливы те же выводы о невозможности аппроксимации $df(z)$ дифференциалом отображения $f_m(z)$ на сетках, не удовлетворяющих определенным условиям.

Следовательно, для всякого $S \in T_m$ требуется построить матрицу $A_m(z)$, $z \in S$, аппроксимирующую $df(z)$ с погрешностью вида

$$e(S) = \sup_{z \in S} \parallel df(z) - A_m(z) \parallel,$$

независящей от степени вырожденности треугольника.

Пусть в D задана прямоугольная система координат. Тогда, если l — направление наибольшей стороны треугольника S, φ — меньший из двух углов между этой стороной и осью абсцисс и

$$\begin{aligned}
K_1(\mu,\varphi) &= \cos\varphi + \frac{h_1(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)}\sin\varphi,\\
K_2(\mu,\varphi) &= \frac{1}{h_2(x_1,x_2)}\sin\varphi,\\
K_3(\mu,\varphi) &= \sin\varphi - \frac{h_1(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)}\cos\varphi,\\
K_4(\mu,\varphi) &= -\frac{1}{h_2(x_1,x_2)}\cos\varphi,\\
K_5(\mu,\varphi) &= -h_3(x_1,x_2)\sin\varphi + \frac{h_1^2(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)}\sin\varphi,\\
K_6(\mu,\varphi) &= h_3(x_1,x_2)\cos\varphi - \frac{h_1^2(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)}\cos\varphi,
\end{aligned}$$

то верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\forall z \in S$ коэффициенты матрицы $A_m(z) = (a_{ij})$ имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned}
a_{11} &= K_1(\mu,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1,x_2) + K_2(\mu,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1,x_2),\\
a_{12} &= K_3(\mu,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1,x_2) + K_4(\mu,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1,x_2),\\
a_{21} &= K_5(\mu,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1,x_2) + K_1(\mu,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1,x_2),\\
a_{22} &= K_6(\mu,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1,x_2) + K_3(\mu,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Тогда справедлива оценка

$$e(S) \le M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta} + M_3\big(\omega_1(d_m) + l_1(d_m)\big) + M_4\big(\omega_2(d_m) + l_2(d_m)\big),$$

где $\omega_1(t), \omega_2(t)$ — модули непрерывности градиентов функций $U_m(x_1,x_2), V_m(x_1,x_2)$ соответственно,

$$l_1(d_m) = \frac{1}{d_m}\int_0^{d_m}\omega_1(t)dt, \quad l_2(d_m) = \frac{1}{d_m}\int_0^{d_m}\omega_2(t)dt$$

и $\alpha = \alpha(\mu) > 0, \beta = \beta(\mu) > 0, d = dist(S, \partial D), M_1 = M_1(\mu, U, d, diamD, \varphi)$, $M_2 = M_2(\mu, V, d, diamD, \varphi)$, $M_3 = M_3(\mu, \varphi), M_4 = M_4(\mu, \varphi)$.

Доказательство. Производя поворот системы координат, аналогичный повороту, описанному в доказательстве теоремы 1, получаем, что $(x_1, x_2) = (x_1(X_1, X_2), x_2(X_1, X_2))$ и система (9) примет тот же вид, что и система (6):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial X_1}(x_1,x_2) = \lambda_1(x_1,x_2)\dfrac{\partial U}{\partial X_1}(x_1,x_2) + \lambda_2(x_1,x_2)\dfrac{\partial U}{\partial X_2}(x_1,x_2), \\ \dfrac{\partial V}{\partial X_2}(x_1,x_2) = \lambda_3(x_1,x_2)\dfrac{\partial U}{\partial X_1}(x_1,x_2) + \lambda_1(x_1,x_2)\dfrac{\partial U}{\partial X_2}(x_1,x_2), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\lambda_1(x_1,x_2) = \frac{2\mu_1(x_1,x_2)\sin 2\varphi - 2\mu_2(x_1,x_2)\cos 2\varphi}{1-\mu_1^2(x_1,x_2)-\mu_2^2(x_1,x_2)},$$
$$\lambda_2(x_1,x_2) = \frac{1+\mu_1^2(x_1,x_2)+\mu_2^2(x_1,x_2)+2\mu_1(x_1,x_2)\cos 2\varphi + 2\mu_2(x_1,x_2)\sin 2\varphi}{1-\mu_1^2(x_1,x_2)-\mu_2^2(x_1,x_2)},$$
$$\lambda_3(x_1,x_2) = \frac{1+\mu_1^2(x_1,x_2)+\mu_2^2(x_1,x_2)-2\mu_1(x_1,x_2)\cos 2\varphi - 2\mu_2(x_1,x_2)\sin 2\varphi}{1-\mu_1^2(x_1,x_2)-\mu_2^2(x_1,x_2)}.$$

А коэффициенты матрицы $A_m(z)$ также преобразуются к виду:

$$a_{11} = \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x_1,x_2),$$
$$a_{12} = L_1(\mu,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x_1,x_2) + L_2(\mu,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x_1,x_2),$$
$$a_{21} = \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x_1,x_2),$$
$$a_{22} = L_3(\mu,\varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x_1,x_2) + L_1(\mu,\varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x_1,x_2),$$

где

$$L_1(\mu,\varphi) = -\frac{h_1(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)},$$
$$L_2(\mu,\varphi) = -\frac{1}{h_2(x_1,x_2)},$$
$$L_3(\mu,\varphi) = h_3(x_1,x_2) - \frac{h_1^2(x_1,x_2)}{h_2(x_1,x_2)}.$$

Далее, поступая как в доказательстве теоремы 1 и полагая

$$M_1 = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1 d^{-\alpha}\left(1+\sup_{z\in S}\left|L_1(\mu,\varphi)\right| + \sup_{z\in S}\left|L_3(\mu,\varphi)\right|\right),$$
$$M_2 = \frac{\beta+2}{\beta+1}C_2 d^{-\beta}\left(1+\sup_{z\in S}\left|L_1(\mu,\varphi)\right| + \sup_{z\in S}\left|L_2(\mu,\varphi)\right|\right),$$
$$M_3 = 1+\sup_{z\in S}\left|L_1(\mu,\varphi)\right| + \sup_{z\in S}\left|L_3(\mu,\varphi)\right|,$$
$$M_4 = 1+\sup_{z\in S}\left|L_1(\mu,\varphi)\right| + \sup_{z\in S}\left|L_2(\mu,\varphi)\right|,$$

получаем требуемое.

Следствие 2. *Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m. Тогда, если выполнены условия* (1), (2) *и* $G \subset\subset D$ *— произвольная компактно вложенная подобласть, то*

$$\max_{S \in T_m, S \subset G} e(S) = \max_{S \in T_m, S \subset G} \sup_{z \in S} \parallel df(z) - A_m(z) \parallel \to 0 \textit{ при } m \to \infty.$$

Пример 2. Пусть $f_m(z)$ — дробно-линейное отображение вида

$$f_m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}.$$

Коэффициенты a, b, c, d несложно определить по известным значениям в трех точках, воспользовавшись равенствами (4).

Поскольку отображение $f_m(z)$ — голоморфно, $U_m(x_1, x_2), V_m(x_1, x_2)$ являются гармоническими функциями и удовлетворяют эллиптическому уравнению Лапласа. Следовательно, согласно [2, с. 297], имеем

$$\omega_1(d_m) \leq N_1 d^{-\gamma} d_m^{\gamma},\ l_1(d_m) \leq N_1 d^{-\gamma} \frac{d_m^{\gamma}}{\gamma+1},$$
$$\omega_2(d_m) \leq N_2 d^{-\tau} d_m^{\tau},\ l_2(d_m) \leq N_2 d^{-\tau} \frac{d_m^{\tau}}{\tau+1},$$

где $N_1 = N_1(U_m, d, diamD), N_2 = N_2(V_m, d, diamD), \gamma > 0, \tau > 0.$

Отсюда получим

$$e(T_m) \leq M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta} + M_3 d_m^{\gamma} + M_4 d_m^{\tau},$$

где $M_3 = M_3(U, U_m, \mu, d, diamD, \varphi), M_4 = M_4(V, V_m, \mu, d, diamD, \varphi)$.

Это неравенство получается, если положить M_1, M_2 такими же, как в теореме 2, и

$$M_3 = \frac{\gamma+2}{\gamma+1} N_1 d^{-\gamma} \left(1 + \sup_{z \in S} \left| L_1(\mu, \varphi) \right| + \sup_{z \in S} \left| L_3(\mu, \varphi) \right| \right),$$
$$M_4 = \frac{\tau+2}{\tau+1} N_2 d^{-\tau} \left(1 + \sup_{z \in S} \left| L_1(\mu, \varphi) \right| + \sup_{z \in S} \left| L_2(\mu, \varphi) \right| \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции по квазиконформным отображениям / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 134 с.
2. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 464 с.
3. Клячин, В. А. C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / В. А. Клячин, Е. А. Пабат // Сиб. журн. индустр. мат. — 2010. — Т. 13, № 2. — С. 69–78.
4. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М. : Мир, 1964. — 830 с.
5. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия / Ф. Препарата, М. Шеймос. — М. : Мир, 1989. — 478 с.

PIECEWISE SMOOTH APPROXIMATION FOR ELLIPTIC SYSTEMS SOLUTIONS

A.V. Boluchevskaya

The paper is devoted to the problem of piecewise smooth approximation for elliptic system solutions defined on triangular grids. It is shown that when we approximate a differential of such a solution by the differential of the approximating mapping the error depends on the triangles shapes and sizes. A mapping is build to approximate the differential with the error that does not depend on triangles in the grid. The analogous results are obtained for Beltrami equation solutions.

Key words: *piecewise smooth approximation, approximation of a differential, elliptic system of equations, Beltrami equation, approximation error bound, triangulation.*