DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.4

УДК 519.21
ББК 22.171

О РАЗЛОЖЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Виталий Николаевич Соболев

Кандидат физико-математических наук, свободный исследователь
sobolev_vn@mail.ru
г. Звенигород, Российская Федерация

Аннотация. В статье представлено новое асимптотическое разложение характеристической функции симметричного распределения с явной оценкой точности остаточной части асимптотического разложения. Данное асимптотическое разложение характеристической функции может быть использовано для построения новых асимптотических разложений в центральной предельной теореме с явной оценкой остатка. Главная часть разложения характеристической функции, полученного в статье, содержит моменты Чебышева – Эрмита.

Ключевые слова: характеристическая функция, асимптотические разложения, оценки аппроксимации, точность аппроксимации, оценки точности аппроксимации, моменты Чебышева – Эрмита, симметричное распределение вероятностей, симметричные случайные величины.

При построении асимптотических разложений в центральной предельной теореме часто используются разложения характеристической функции. Например, разложение

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\alpha_k}{k!}(it)^k+\rho_m(t), \tag{1}$$

где α_k – обычный k-й момент распределения P с характеристической функцией $f(t)$, а для функции остатка разложения справедлива оценка

$$|\rho_m(t)|\le\frac{\beta_{m+1}}{(m+1)!}|t|^{m+1}$$

в которой β_{m+1} – абсолютный $(m+1)$-й момент распределения P. Вполне естественно предположить, что при t, близких к нулю, главная часть представления $f(t)=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\alpha_k}{k!}(it)^k+\rho_{m+1}(t)$ будет ближе к $f(t)$, чем главная часть разложения (1). Однако, если момент α_{m+1} не существует, то возникает вопрос оценки остатка $\rho_{m+1}(t)$. Разложения, использующие последний известный момент α_{m+1} в главной части самого разложения, были предложены Х. Правитцем [9] и исследовались И.Г. Шевцовой [10]. Используя модификацию данных разложений для характеристической функции симметричных распределений (далее $\alpha_{2j+1}=0$ при $j=0,1,...$ и число $(m+1)$ четно), предложенную В.В. Сенатовым в [2]

© Соболев В.Н., 2018

$$f(t)=\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha_j}{j!}(it)^j+\lambda\frac{\alpha_{m+1}}{(m+1)!}(it)^{m+1}+\gamma(t)\bar{\lambda}\frac{\alpha_{m+1}}{(m+1)!}(it)^{m+1}, \qquad (2)$$

в данной работе построены разложения характеристических функций симметричных распределений, аналогичные представленным в [7] и [8], но с иной оценкой остатка. Отметим, что в главную часть разложения (2) момент α_{m+1} входит вместе с коэффициентом (параметром) $\lambda\in[0,1]$, также данный параметр входит и в остаток в виде функции $\bar{\lambda}=\max\{\lambda,1-\lambda\}$, а для функции γ справедливо неравенство $|\gamma|\le 1$.

Далее для удобства будут использоваться нормированные моменты $a_k=\frac{\alpha_k}{k!}$, $k=0,1,...,m+1$, где α_k – k-й момент распределения P и аналогичные величины для стандартного нормального закона $b_{2j}=\frac{(-1)^j}{2^j j!}$, $j=0,1,...$. Запишем разложение (2) в терминах нормированных моментов

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m}a_k(it)^k+\lambda a_{m+1}(it)^{m+1}+\gamma(t)\bar{\lambda}a_{m+1}(it)^{m+1}, \qquad (3)$$

Через величины α_k и b_{2j} легко выражаются нормированные моменты Чебышева – Эрмита

$$\theta_l=\sum_{j=0}^{\lfloor l/2\rfloor}a_{l-2j}b_{2j}.$$

Последняя формула показывает, что в формировании четных моментов Чебышева – Эрмита

$$\theta_{2n}=\sum_{j=0}^{n}a_{2n-2j}b_{2j}=a_{2n}b_0+a_{2n-2}b_2+...+a_2b_{2k-2}+a_0b_{2k}$$

участвуют только четные моменты a_{2n}, a_{2n-2}, …, a_2, a_0, а в формировании нечетных

$$\theta_{2n+1}=\sum_{j=0}^{n}a_{2n+1-2j}b_{2j}=a_{2n+1}b_0+a_{2n-1}b_2+...+a_3b_{2k-2}+a_1b_{2k}$$

участвуют только нечетные моменты a_{2n+1}, a_{2n-1}, …, a_3, a_1. В любом случае старший из моментов a_k, участвующих в формировании момента θ_l, имеет тот же порядок, что и момент θ_l, то есть это момент a_l. Поскольку $b_0=1$, то

$$\theta_l=a_l+\sum_{j=1}^{\lfloor l/2\rfloor}a_{l-2j}b_{2j}.$$

Данное представление позволяет понять, что если у исходного распределения P существуют (или рассматриваются) только моменты вплоть до момента порядка (m + 1) включительно, то полностью сформировать момент Чебышева – Эрмита порядка (m + 2) не удастся. Можно выписать только часть суммы

$$\theta_{m+2}^{(m+1)}=\theta_{m+2}^{(m)}=\sum_{j=1}^{\lfloor (m+2)/2\rfloor}a_{m+2-2j}b_{2j},$$

которую называют усеченным моментом Чебышева – Эрмита. Также не удастся полностью сформировать и моменты Чебышева – Эрмита любого порядка большего, чем (m + 1). В связи с этим возникают усеченные моменты Чебышева – Эрмита порядка $l\ge(m+2)$, которые определяются формулой

$$\theta_l^{(m+1)} = \sum_{j=1;\,2j\ge l-m-1}^{\lfloor l/2 \rfloor} a_{l-2j} b_{2j}, \quad l > m+1.$$

В случае четного последнего известного момента порядка $2r = m + 1$ для моментов Чебышева – Эрмита верны представления

$$\theta_{m+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} a_{m+1-2j} b_{2j} = \sum_{j=0}^{r} a_{2r-2j} b_{2j} = a_{2r} b_0 + a_{2r-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{2r-2} + a_0 b_{2r},$$

$$\theta_{m+1}^{(m)} = \sum_{j=1}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} a_{m+2-2j} b_{2j} = \sum_{j=1}^{r} a_{2r-2j} b_{2j} = a_{2r-2} b_2 + a_{2r-4} b_4 + \ldots + a_2 b_{2r-2} + a_0 b_{2r},$$

$$\theta_{m-1} = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} a_{m-1-2j} b_{2j} = \sum_{j=0}^{r-1} a_{2r-2-2j} b_{2j} = a_{2r-2} b_0 + a_{2r-4} b_2 + \ldots + a_2 b_{2r-4} + a_0 b_{2r-2}.$$

В разложении (3) характеристической функции $f(t)$ присутствует слагаемое $\lambda a_{m+1}(it)^{m+1}$, содержащее параметр λ перед моментом a_{m+1}. Данный параметр может участвовать в формировании моментов Чебышева – Эрмита. Так, например, при $m + 1 = 2r$ возникает представление

$$\theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)} = \lambda a_{2r} b_0 + \sum_{j=1}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} a_{m+2-2j} b_{2j} = \lambda a_{2r} b_0 + a_{2r-2} b_2 + \ldots + a_2 b_{2r-2} + a_0 b_{2r}.$$

В обозначениях моментов Чебышева – Эрмита $\theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)}$, с включенным в них параметром, автор следует обозначениям В.В. Сенатова из работы [2].

Сравнивая введенные выше моменты Чебышева – Эрмита, легко убедиться в справедливости следующих равенств

$$\theta_{m+1} = a_{m+1} + \theta_{m+1}^{(m-1)}, \quad \theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)} = \lambda a_{m+1} + \theta_{m+1}^{(m-1)}, \quad \theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)} = \theta_{m+1} + (\lambda - 1) a_{m+1}.$$

Представление для характеристической функции, полученное в следующем ниже утверждении, позволяет получать разложения в центральной предельной теореме с явной оценкой остатка (см., например, [3]). Для этого, например, достаточно повторить ход доказательства разложений, представленных в [1; 4–6], заменив в них соответствующим образом разложения характеристической функции нижеследующим.

Утверждение. *Пусть $f(t)$ – характеристическая функция симметричного распределения* P, *у которого существует четный абсолютный момент порядка $(m+2) \ge 2$. Тогда для характеристической функции с учетом введенных выше определений справедливо представление*

$$f(t) = e^{-t^2/2} \left(\sum_{k=0}^{m+1} \theta_k (it)^k - (1-\lambda) a_{m+1} (it)^{m+1} \right) + R_m, \tag{4}$$

в котором для остаточной части разложения справедлива оценка

$$|R_m| \le \bar{\lambda} \cdot a_{m+1} \cdot |t|^{m+1} + \|\theta_m\| \cdot |b_2| \cdot |t|^{m+2} + \lambda \cdot a_{m+1} \cdot |b_2| \cdot |t|^{m+3} + \|\theta_{m-1}\| \cdot b_4 \cdot |t|^{m+3},$$

где

$$\|\theta_l\| = \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} |a_{l-2j}| \cdot |b_{2j}|, \; 0 \le l \le n.$$

Доказательство. Пусть t действительное число, а $\omega = it$. Запишем произведение функций

$$e^{\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j}\omega^{2j},$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k\omega^k + \lambda a_{m+1}\omega^{m+1} + \gamma(t)\bar{\lambda} a_{m+1}\omega^{m+1}$$

в виде равенства

$$f(t)e^{\frac{t^2}{2}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_{2j}\omega^{2j}\right)\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\omega^k\right) + \lambda a_{m+1}\omega^{m+1}e^{\frac{t^2}{2}} + \gamma\bar{\lambda} a_{m+1}\omega^{m+1}e^{\frac{t^2}{2}},$$

которое после раскрытия скобок и группировки соответствующих слагаемых можно представить в следующем виде

$$f(t)e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{m}\theta_k\omega^k + \theta_{m+1}^{(m)}\omega^{m+1} + \sum_{k=m+2}^{\infty}\theta_k^{(m)}\omega^k + \lambda a_{m+1}\omega^{m+1}e^{\frac{t^2}{2}} + \rho_m e^{\frac{t^2}{2}}, \tag{5}$$

где $\rho_m = \gamma\bar{\lambda} a_{m+1}\omega^{m+1}$.

Третье слагаемое из правой части последнего равенства (5) можно представить в виде суммы

$$\sum_{k=m+2}^{\infty}\theta_k^{(m)}\omega^k = \sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+2+k}^{(m)}\omega^{m+2+k} = \omega^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+2+2k}^{(m)}\omega^{2k} + \omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+3+2k}^{(m)}\omega^{2k},$$

а четвертое слагаемое

$$\lambda a_{m+1}\omega^{m+1}e^{\frac{t^2}{2}} = \lambda a_{m+1}\omega^{m+1}\sum_{j=0}^{\infty} b_{2j}\omega^{2j} = \lambda a_{m+1}\omega^{m+1} + \lambda a_{m+1}\omega^{m+1}\sum_{j=1}^{\infty} b_{2j}\omega^{2j} =$$

$$= \lambda a_{m+1}\omega^{m+1} + \lambda a_{m+1}\omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}\omega^{2k}.$$

Последние два разбиения на суммы с учетом равенства $\theta_{m+1} = a_{m+1} + \theta_{m+1}^{(m-1)}$ позволяют переписать разложение (5) в виде

$$f(t)e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{m+1}\theta_k\omega^k - (1-\lambda a_{m+1})\omega^{m+1} + \omega^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+2+2k}^{(m)}\omega^{2k} + \omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+3+2k}^{(m)}\omega^{2k} +$$

$$+ \lambda a_{m+1}\omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}\omega^{2k} + \rho_m(t)e^{\frac{t^2}{2}}. \tag{6}$$

Первые два слагаемых из правой части последнего равенства (6) доставляют главную часть искомого разложения (4), а последние четыре слагаемых – оценку остатка.

Действительно, для последнего слагаемого из правой части равенства (6) справедливо неравенство $|\rho_m|\cdot e^{\frac{t^2}{2}} \le \bar{\lambda} a_{m+1}|t|^{m+1}e^{\frac{t^2}{2}}$.

Далее из оценки $|b_{2k+2}| \le |b_2|\cdot|b_{2k}|$ для предпоследнего слагаемого из правой части равенства (6) получаем

$$\left|\lambda a_{m+1}\omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+2}\omega^{2k}\right| \le \lambda a_{m+1}|t|^{m+3}|b_2|\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = \lambda a_{m+1}|t|^{m+3}|b_2|\cdot e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Третье слагаемое $\omega^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+2+2k}^{(m)}\omega^{2k}$ из правой части равенства (6) доставит оценку $\|\theta_m\|\cdot|b_2|\cdot|t|^{m+2}$. Из представления

$$\theta_{m+2+2k}^{(m+1)} = \sum_{j=1;\,2j\ge 2k+1}^{\lfloor (m+2+2k)/2\rfloor} a_{m+2+2k-2j}b_{2j} = \sum_{j=k+1}^{\lfloor m/2\rfloor+k+1} a_{m-2(j-k-1)}b_{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2\rfloor} a_{m-2j}b_{2(j+k+1)}$$

и неравенства $\left|b_{2(j+k+1)}\right| \le |b_{2j}|\cdot\left|b_{2(k+1)}\right|$ следует справедливость оценки

$$\left|\theta_{m+2+2k}^{(m+1)}\right| \le \left|b_{2(k+1)}\right|\cdot\sum_{j=0}^{\lfloor m/2\rfloor}|a_{m-2j}||b_{2j}| = \left|b_{2(k+1)}\right|\cdot\|\theta_m\| \le |b_2|\cdot|b_{2k}|\cdot\|\theta_m\|,$$

которая, в свою очередь, приводит к неравенству

$$\left|\omega^{m+2}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+2+2k}^{(m)}\omega^{2k}\right| \le |b_2|\cdot\|\theta_m\|\cdot|t|^{m+2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = |b_2|\cdot\|\theta_m\|\cdot|t|^{m+2}e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Четвертое слагаемое $\omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+3+2k}^{(m)}\omega^{2k}$ из правой части равенства (6) доставит оценку $\|\theta_{m-1}\|\cdot|b_4|\cdot|t|^{m+3}$. Так, из представления

$$\theta_{m+3+2k}^{(m+1)} = \sum_{j=1;\,2j\ge 2k+2}^{\lfloor (m+3+2k)/2\rfloor} a_{m+3+2k-2j}b_{2j} = \sum_{j=k+2}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor+k+2} a_{(m-1)-2(j-k-2)}b_{2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor} a_{(m-1)-2j}b_{2(j+k+2)}$$

и неравенства $\left|b_{2(j+k+2)}\right| \le |b_{2j}|\cdot\left|b_{2(k+2)}\right|$ следует оценка

$$\left|\theta_{m+3+2k}^{(m+1)}\right| \le \left|b_{2(k+2)}\right|\cdot\sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor}\left|a_{(m-1)-2j}\right||b_{2j}| = \left|b_{2(k+2)}\right|\cdot\|\theta_{m-1}\| \le b_4\cdot|b_{2k}|\cdot\|\theta_{m-1}\|,$$

которая приводит к неравенству

$$\left|\omega^{m+3}\sum_{k=0}^{\infty}\theta_{m+3+2k}^{(m)}\omega^{2k}\right| \le |b_4|\cdot\|\theta_{m-1}\|\cdot|t|^{m+3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}|b_{2k}||t|^{2k} = b_4\cdot\|\theta_{m-1}\|\cdot|t|^{m+3}e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Этим неравенством заканчивается доказательство утверждения. □

Замечание 1. Аналогично [2] разложение (4) можно записать в виде

$$f(t) = e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=0}^{m}\theta_k(it)^k + \theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)}(it)^{m+1}\right) + R_m. \tag{7}$$

Рассмотрим результат доказанного выше утверждения с качественной стороны вопроса.

Замечание 2. Разложение (4) при $\lambda = \frac{1}{2}$ принимает вид

$$f(t) = e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=0}^{m+1}\theta_k(it)^k - \frac{a_{m+1}}{2}(it)^{m+1}\right) + R_m, \tag{8}$$

где

$$\left|R_m\right| \le \frac{a_{m+1}}{2} \cdot |t|^{m+1} + \left\|\theta_m\right\| \cdot \left|b_2\right| \cdot |t|^{m+2} + \left(\frac{a_{m+1}}{2} \cdot b_2 + \left\|\theta_{m-1}\right\| \cdot \left|b_4\right|\right) \cdot |t|^{m+3}.$$

Очевидно, что минимум функции $\overline{\lambda} = \max\{\lambda, 1-\lambda\}$ на отрезке [0; 1] равен $\frac{1}{2}$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким образом, из всех рассматриваемых оценок остатка данная оценка в некотором смысле наилучшая. Однако порядок оценок по степеням t при различных $\lambda \in [0,1]$ остается одним и тем же: $m+1$, то есть в оценке при любых $\lambda \in [0,1]$ присутствует $|t|^{m+1}$.

Замечание 3. Разложение (4) при $\lambda = 1$ принимает вид

$$f(t) = e^{-t^2/2} \sum_{k=0}^{m+1} \theta_k (it)^k + R_m, \tag{9}$$

где

$$\left|R_m\right| \le a_{m+1} \cdot |t|^{m+1} + \left\|\theta_m\right\| \cdot \left|b_2\right| \cdot |t|^{m+2} + \left(a_{m+1} \cdot \left|b_2\right| + \left\|\theta_{m-1}\right\| \cdot b_4\right) \cdot |t|^{m+3}. \tag{10}$$

Сравним разложение (9) с разложением, полученным в [7]. Разложение в [7] получено в предположении существования у исходного распределения P абсолютного момента β_{m+2} порядка $m+2$. Формула разложения из [7] полностью совпадает с формулой (9), отличие только в оценке остатка разложения, которая в [7] выглядит следующим образом:

$$\left|R_m\right| \le \beta_{m+2} \cdot |t|^{m+2} + \left\|\theta_{m+1}\right\| \cdot \left|b_2\right| \cdot |t|^{m+3} + \left\|\theta_m\right\| \cdot b_4 \cdot |t|^{m+4}. \tag{11}$$

Видно, что при существовании у исходного распределения P еще одного следующего за моментом a_{m+1} момента β_{m+2} можно выписать разложение с такой же главной частью разложения, но при этом оценка остатка имеет по t порядок на единицу больше, то есть $|t|^{m+2}$. Таким образом, в случае существования у исходного распределения момента β_{m+2}, можно предъявить для R_m оценки, которые имеют при t, близких к нулю, порядок не ниже $|t|^{m+2}$. В то же время полученная в утверждении оценка для аналогичного разложения доставляет порядок $|t|^{m+1}$ в отсутствии информации о β_{m+2}. Естественным образом возникает вопрос о сохранении у остатка разложения (9) порядка $|t|^{m+2}$ при условии использования у исходного распределения информации только о моменте a_{m+1}. Следующим возникает вопрос о реальной точности рассматриваемой разности (см.: [2])

$$R_m = f(t) - e^{-t^2/2} \sum_{k=0}^{m+1} \theta_k (it)^k$$

при тех же ограничениях на существование (использование) моментов исходного распределения.

Построенное разложение показывает, что при существовании момента a_{m+1} можно выписать более длинное разложение с явной оценкой остатка так, как будто существует следующий момент a_{m+2}. При этом оценка остатка (в отличие от оценки, использующей информацию о моменте β_{m+2}) имеет на единицу меньший порядок по t, то есть порядок $|t|^{m+1}$, а не $|t|^{m+2}$.

Пользуясь случаем, автор выражает свою благодарность В.В. Сенатову.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сенатов, В. В. О новых формах асимптотических разложений в центральной предельной теореме / В. В. Сенатов, В. Н. Соболев // Теория вероятностей и ее применения. – 2012. – № 57:1. – С. 124–140.

2. Сенатов, В. В. О реальной точности аппроксимаций в центральной предельной теореме. II / В. В. Сенатов // Математические труды. – 2016. – № 19:2. – С. 170–199.

3. Соболев, В. Н. О точности некоторых асимптотических разложений в центральной предельной теореме / В. Н. Соболев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2011. – № 18:5. – С. 807.
4. Соболев, В. Н. Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме / В. Н. Соболев // Теория вероятностей и ее применения. – 2007. – № 52:3. – С. 490–505.
5. Соболев, В. Н. Об асимптотических разложениях в ЦПТ / В. Н. Соболев // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2010. – № 28, вып. 3 (18). – С. 35–47.
6. Соболев В. Н. Об асимптотических разложениях для функций распределения в ЦПТ / В. Н. Соболев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – № 19:5. – С. 749–750.
7. Соболев, В. Н. Об одном разложении для характеристической функции / В. Н. Соболев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2015. – № 22:4. – С. 501–503.
8. Соболев, В. Н. Об одном разложении характеристической функции / В. Н. Соболев // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2014. – № 21:5. – С. 533–534.
9. Prawitz, H. Noch einige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen / H. Prawitz // Scand. Actuar. J. – 1991. – № 1. – P. 49–73.
10. Shevtsova, I. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications / I. Shevtsova // J. Math. Analysis Appl. – 2014. – Vol. 418. – P. 185–210.

REFERENCES

1. Senatov V.V., Sobolev V.N. O novykh formakh asimptoticheskikh razlozheniy v tsentralnoy predelnoy teoreme [On New Forms of Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya* [Theory Probab. Appl.], 2013, no. 57 (1), pp. 82-96.
2. Senatov V.V. O realnoy tochnosti approksimatsiy v tsentralnoy predelnoy teoreme. II [On the Real Accuracy of Approximation in the Central Limit Theorem]. *Matematicheskie trudy*, 2016, no. 19 (2), pp. 170-199.
3. Sobolev V.N. O tochnosti nekotorykh asimptoticheskikh razlozheniy v tsentralnoy predelnoy teoreme [On the Accuracy of Certain Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2011, no. 18 (5), p. 807.
4. Sobolev V.N. Ob asimptoticheskikh razlozheniyakh v tsentralnoy predelnoy teoreme [On Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya* [Theory Probab. Appl.], 2007, no. 52 (3), pp. 490-505.
5. Sobolev V.N. Ob asimptoticheskikh razlozheniyakh v TsPT [On Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem]. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2010, no. 18, pp. 5-12.
6. Sobolev V.N. Ob asimptoticheskikh razlozheniyakh dlya funktsiy raspredeleniya v TsPT [On Asymptotic Expansions for Distribution Functions in the Central Limit Theorem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2012, no. 19 (5), pp. 749-750.
7. Sobolev V.N. Ob odnom razlozhenii dlya kharakteristicheskoy funktsii [An Asymptotic Expansion of the Characteristic Function]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2015, no. 22 (4), pp. 501-503.
8. Sobolev V.N. Ob odnom razlozhenii kharakteristicheskoy funktsii [An Asymptotic Expansion of the Characteristic Function]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2014, no. 21 (5), pp. 533-534.
9. Prawitz H. Noch einige Ungleichungen fur charakteristische Funktionen. *Scand. Actuar. J.*, 1991, no. 1, pp. 49-73.
10. Shevtsova I. On the accuracy of the approximation of the complex exponent by the first terms of its Taylor expansion with applications. *J. Math. Analysis Appl.*, 2014, vol. 418, pp. 185-210.

ON EXPANSION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF SYMMETRIC DISTRIBUTIONS

Vitaliy Nikolaevich Sobolev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Free Researcher
sobolev_vn@mail.ru
Zvenigorod, Russian Federation

Abstract. The article presents a new asymptotic expansion of the characteristic function of a symmetric distribution with a clear assessment of the accuracy of the residual part of the asymptotic expansion. The asymptotic expansion of the characteristic function can be used to build a new asymptotic expansion in the Central limit theorem with an explicit estimate for the remainder. In the article the main part of the decomposition of the characteristic function contains the moments of the Chebyshev – Hermite.

When constructing asymptotic expansions in the Central limit theorem, the expansions of the characteristic function are often used. For example, a Taylor expansion of the characteristicfunction

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\alpha_k}{k!}(it)^k+\rho_m(t), \tag{1}$$

where α_k – the k-th moment of the probability distribution P with characteristic function $f(t)$ and

$$|\rho_m(t)|\le\frac{\beta_{m+1}}{(m+1)!}|t|^{m+1},$$

where β_{m+1} – the absolute moments of order $(m+1)$.

It would be quite natural to assume that $f(t)=\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\alpha_k}{k!}(it)^k+\rho_{m+1}(t)$ is better (1). However, if the moment α_{m+2} does not exist, then the question arises of estimating the remainder.

Asymptotic expansions using the last known moment in the main part of the decomposition were proposed by Prawitz [9] and investigated by Shevtsova [10]. A modification of these expansions for the characteristic function of symmetric distributions (we further assume that $\alpha_{2j+1}=0$ for $j=0,1,...$ and $(m+1)$ – even integer value) is proposed by Senatov [2]

$$f(t)=\sum_{j=0}^{m}\frac{\alpha_j}{j!}(it)^j+\lambda\frac{\alpha_{m+1}}{(m+1)!}(it)^{m+1}+\gamma(t)\bar{\lambda}\frac{\alpha_{m+1}}{(m+1)!}(it)^{m+1}, \tag{2}$$

where $\lambda\in[0,1]$, $\bar{\lambda}=\max\{\lambda,1-\lambda\}$, a function γ such that $|\gamma|\le 1$.

This paper presents new expansions of the characteristic functions of symmetric distributions similar to those constructed in [8] (see also [3; 7]), but with a different estimate of the remainder. To do this, we will use the formula (2) and normalized moments of the Chebyshev – Hermite

$$\theta_l=\sum_{j=0}^{\lfloor l/2\rfloor}a_{l-2j}b_{2j}.$$

where $a_k=\frac{\alpha_k}{k!}$, $k=0,1,...,m+1$, and $b_{2j}=\frac{(-1)^j}{2^j\,j!}$, $j=0,1,...$.

In this context, also occur incomplete moments of the Chebyshev – Hermite of order $l\ge(m+2)$

$$\theta_l^{(m+1)}=\sum_{j=1;\,2j\ge l-m-1}^{\lfloor l/2\rfloor}a_{l-2j}b_{2j},\quad l>m+1.$$

The asymptotic expansion of the characteristic function (4) from the following statement can be used to build a new asymptotic expansions in the Central limit theorem with an explicit estimate for the remainder. For example, it is enough to repeat the course of evidence from [1; 4–6] using a new expansion (4).

Theorem. Suppose that the characteristic function of symmetric distributions $f(t)$ has a moment of even order $(m+2)\geq 2$. Then

$$f(t)=e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=0}^{m+1}\theta_k(it)^k-(1-\lambda)a_{m+1}(it)^{m+1}\right)+R_m, \qquad (4)$$

and the remainder term satisfies the inequality

$$|R_m|\leq\bar{\lambda}\cdot a_{m+1}\cdot|t|^{m+1}+\|\theta_m\|\cdot|b_2|\cdot|t|^{m+2}+\lambda\cdot a_{m+1}\cdot|b_2|\cdot|t|^{m+3}+\|\theta_{m-1}\|\cdot b_4\cdot|t|^{m+3},$$

where

$$\|\theta_l\|=\sum_{j=0}^{\lfloor l/2\rfloor}|a_{l-2j}|\cdot|b_{2j}|,\ 0\leq l\leq n.$$

Remark 1. The expansion (4) can be written in the form

$$f(t)=e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=0}^{m}\theta_k(it)^k+\theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)}(it)^{m+1}\right)+R_m. \qquad (7)$$

where $\theta_{m+1}^{(m+1,\lambda)}=\lambda a_{m+1}+\theta_{m+1}^{(m-1)}$ (for more details, see [2]).

Remark 2. For $\lambda=\frac{1}{2}$ expansion (4) takes the form

$$f(t)=e^{-t^2/2}\left(\sum_{k=0}^{m+1}\theta_k(it)^k-\frac{a_{m+1}}{2}(it)^{m+1}\right)+R_m, \qquad (8)$$

where

$$|R_m|\leq\frac{a_{m+1}}{2}\cdot|t|^{m+1}+\|\theta_m\|\cdot|b_2|\cdot|t|^{m+2}+\left(\frac{a_{m+1}}{2}\cdot b_2+\|\theta_{m-1}\|\cdot|b_4|\right)\cdot|t|^{m+3}.$$

The minimum value of $\bar{\lambda}=\max\{\lambda,1-\lambda\}$ on the closed interval $[0,1]$ is $\frac{1}{2}$ at a point $\lambda=\frac{1}{2}$. Therefore, this assessment $\lambda=\frac{1}{2}$ is minimal.

Remark 3. For $\lambda=1$ expansion (4) takes the form

$$f(t)=e^{-t^2/2}\sum_{k=0}^{m+1}\theta_k(it)^k+R_m, \qquad (9)$$

where

$$|R_m|\leq a_{m+1}\cdot|t|^{m+1}+\|\theta_m\|\cdot|b_2|\cdot|t|^{m+2}+\left(a_{m+1}\cdot|b_2|+\|\theta_{m-1}\|\cdot b_4\right)\cdot|t|^{m+3}. \qquad (10)$$

Asymptotic expansion (9) coincides with expansions from (7), which are obtained under the assumption that distribution P has the absolute moments β_{m+2} of order $m+2$ but have a different estimate of the approximation accuracy (9)

$$|R_m|\leq\beta_{m+2}\cdot|t|^{m+2}+\|\theta_{m+1}\|\cdot|b_2|\cdot|t|^{m+3}+\|\theta_m\|\cdot b_4\cdot|t|^{m+4}. \qquad (11)$$

A comparison of the last two bounds leads to the question of the real accuracy of the expansion (4) (see [2]).

Key words: characteristic function, asymptotic expansions, estimates of approximation, accuracy of approximation, approximation exactness, estimates for the exactness of approximation, moments of the Chebyshev – Hermite, symmetric distribution of probabilities, symmetric random variables.