DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.3

УДК 519.635
ББК 22.19

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К СИСТЕМАМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ИХ РЕДУКЦИЯ И УНИФИКАЦИЯ

Максим Леонидович Зайцев

Аспирант, соискатель,
Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН
mlzaytsev@gmail.com
ул. Большая Тульская, 52, 115191 г. Москва, Российская Федерация

Вячеслав Борисович Аккерман

Кандидат физико-математических наук, преподаватель,
Университет Западной Вирджинии
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 г. Моргантаун, США

Аннотация. Рассматриваются системы УрЧП первого порядка и их некоторые свойства. Показывается, что задача Коши для этих систем уравнений может быть сведена к задаче Коши для одного в общем случае квазилинейного уравнения второго порядка. Причем возможна даже унификация внешнего вида этого уравнения. Устанавливается связь между гидродинамическими уравнениями Эйлера и произвольными системами УрЧП первого порядка и предлагается новый способ их переопределения. Приводится пример существенно нелинейной системы уравнений из математической физики.

Ключевые слова: системы уравнений в частных производных, задача Коши, размерность дифференциальных уравнений, квазилинейные уравнения в частных производных, ОДУ, переопределенные системы дифференциальных уравнений, уравнения Эйлера.

1. Изучение общих свойств нелинейных уравнений в частных производных и методов их решения представляет собой быстро развивающуюся область современной математики (см.: [6; 9; 10]). При описании большинства реальных физических процессов мы приходим к нелинейным уравнениям, и только существенные дополнительные предположения о малости амплитуд волн поля или амплитуд колебания среды, амплитуд отклонения от состояния равновесия и т. п. приводят к линейным уравнениям, которые изучены более глубоко [8]. В данной работе мы приводим пример существенно нелинейной системы уравнений из математической физики. Цель нашей статьи заключается в исследовании некоторых общих свойств систем УрЧП первого порядка и возможности их упрощения (редукции), используя результаты, полученные авторами ранее (см.:

[1–4]). В работах [1–4] было показано, что при достаточно хорошем переопределении систем дифференциальных уравнений (увеличении числа уравнений по отношению к числу неизвестных) их можно понизить в размерности (уменьшить количество переменных у неизвестных функций, а остальные учесть через параметры). Возникла задача получить как можно больше и лучше переопределений широких классов УрЧП, то есть методов преобразований к системам, где число уравнений больше числа неизвестных. Были получены переопределения уравнений гидродинамики, ОДУ, а также высказано предположение о возможности переопределения любых систем УрЧП. В данной работе мы приводим новый способ переопределения любых УрЧП первого порядка, и при этом мы стараемся учесть, чтобы общие решения этой расширенной системы уравнений содержали только решения заранее заданной задачи Коши. Это выгодно в том смысле, что тогда нашим методом понижения размерности теоретически можно понижать размерность этих уравнений вплоть до полного решения задачи Коши, представимого в явном виде. Важно сделать это как можно проще, не увеличивая сильно размерность исходной системы УрЧП, так как в противном случае очень быстро растут вычислительные затраты для решения переопределенной системы дифференциальных уравнений методом снижения размерности.

В книге [6, с. 54] предложен достаточно общий способ преобразования систем УрЧП к системам квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Этот факт используется при доказательстве теоремы Коши – Ковалевской, классической теоремы теории дифференциальных уравнений в частных производных. В нашей работе рассматривается редукция – сведение систем УрЧП всего к одному квазилинейному эволюционному уравнению второго порядка от одного неизвестного. При этом увеличивается размерность – количество переменных, и возникают новые задачи для исследования. Исследуется унификация внешнего вида систем УрЧП первого порядка с помощью параметризации задачи Коши.

Везде мы предполагаем достаточную гладкость, непрерывность и дифференцируемость всех рассматриваемых функций, а в некоторых случаях и их аналитичность. Для простоты везде предполагается, что решения ищутся в пространстве аналитических функций и что выполняются условия теоремы Коши – Ковалевской о единственности решения задачи Коши для систем УрЧП [6].

2. Не ограничивая общности, рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций $S_v(\mathbf{x})$, $v = 1...p$, $\mathbf{x} = (x_1,...x_m) \in \Re_{\mathbf{x}}^m$

$$H_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}}, S_v, \mathbf{x}\right) = 0,\ v = 1...p,\ k = 1...p. \tag{1}$$

Здесь $H_k(...)$, $k = 1...p$ – некоторые гладкие, бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов $\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}}$, S_v, $\mathbf{x}$, $v = 1...p$. Обозначим

$$U_v^i = \frac{\partial S_v}{\partial x_i},\ v = 1...p,\ i = 1...m. \tag{2}$$

Тогда уравнения (1) можно записать в виде

$$H_k\left(U_v^i, S_v, \mathbf{x}\right) = 0,\ i = 1...m,\ v = 1...p,\ k = 1...p. \tag{3}$$

Можно выписать следующие выражения:

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_m} = \frac{\partial^2 S_v}{\partial x_m \partial x_i} = \frac{\partial U_v^m}{\partial x_i},\ i = 1...(m-1),\ v = 1...p, \tag{4}$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = U_v^m, \; v = 1 \ldots p. \tag{5}$$

В данной статье мы будем полагать заранее, что все производные $U_v^m = \partial S_v / \partial x_m, \; v = 1 \ldots p$ будут выражаться из (3) явно и глобально через все остальные. Обозначим тогда

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = F_v^m\left(\frac{\partial S_k}{\partial x_i}, S_k, \mathbf{x}\right), \; i = 1 \ldots m-1, \; v = 1 \ldots p, \; k = 1 \ldots p. \tag{6}$$

$$U_v^m = F_v^m\left(U_k^i, S_k, \mathbf{x}\right), \; i = 1 \ldots m-1, \; v = 1 \ldots p, \; k = 1 \ldots p. \tag{7}$$

Если мы подставим (7) в (4), (5), то получим **квазилинейную** систему уравнений в частных производных первого порядка для неизвестных U_v^i, S_v, $v = 1 \ldots p$, $i = 1 \ldots (m-1)$, где все производные по x_m явно выражены через все остальные. С точки зрения теоремы Коши –Ковалевской система (4), (5) корректна. Заметим, если в выражении (7) отсутствует зависимость от неизвестных S_v, $v = 1 \ldots p$, то, если подставить их выражения в (4), мы получим систему уравнений для неизвестных U_v^i, $v = 1 \ldots p$, $i = 1 \ldots (m-1)$ в дивергентном виде. Неизвестные S_v, $v = 1 \ldots p$, тогда определяются просто по формуле (5).

Рассмотрим задачу Коши для системы УрЧП (1) [6]:

$$S_v\Big|_{x_m = 0} = S_v^0\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right), \; v = 1 \ldots p. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу Коши для системы УрЧП (4), (5):

$$U_v^i\Big|_{x_m = 0} = \frac{\partial S_v^0\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right)}{\partial x_i}, \; v = 1 \ldots p, \; i = 1 \ldots (m-1), \tag{9}$$

$$S_v\Big|_{x_m = 0} = S_v^0\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right), \; v = 1 \ldots p. \tag{10}$$

Очевидно, всякое решение УрЧП (1) с задачей (8) переходит, учитывая формулу (2), в решение системы УрЧП (4), (5), которое является решением задачи Коши (9), (10). Чтобы доказать обратное, фактически нужно доказать, что из системы (4), (5) следует:

$$U_v^i = \frac{\partial S_v}{\partial x_i}, \; v = 1 \ldots p, \; i = 1 \ldots m. \tag{11}$$

В случае $i = m$ это следует из самого определения уравнения (5). В случае $i = 1 \ldots (m-1)$ из (4), (5) с учетом (9), (10) следует:

$$U_v^i = U_v^i\Big|_{x_m = 0} + \frac{\partial \int_0^{x_m} U_v^m dx_m}{\partial x_i} = U_v^i\Big|_{x_m = 0} + \frac{\partial \int_0^{x_m} \frac{\partial S_v}{\partial x_m} dx_m}{\partial x_i} = U_v^i\Big|_{x_m = 0} - \frac{\partial S_v^0\left(x_1, \ldots x_{m-1}\right)}{\partial x_i} + \frac{\partial S_v}{\partial x_i} = \frac{\partial S_v}{\partial x_i},$$

$$i = 1 \ldots (m-1), \; v = 1 \ldots p. \tag{12}$$

Таким образом, мы видим, что формула (11) доказана. Многообразие всех решений системы уравнений (4), (5), (7) не эквивалентно многообразию решений исходной системы (1). Следуя [6, с. 54], мы доказали, что, ограничивая множества начальных значений, мы добьемся, что множества решений этих начальных задач будут совпадать.

Интересно заметить, что система (4), (5) похожа на систему уравнений Эйлера движения потенциальной жидкости. Величины U_v^i, $v=1...p$, $i=1...(m-1)$ напоминают скорости, неизвестные S_v, $v=1...p$ – потенциалы скорости, а $-U_v^m$, $v=1...p$ – динамическое давление [7]. Мы имеем несколько потенциальных жидкостей, скорости, потенциалы скоростей и давления которых коррелируют по заданному закону. В работах [1; 2; 4] показывается, что уравнения Эйлера могут быть переопределены, а, следовательно, может быть переопределена и система уравнений (4), (5), (7) с возможной последующей редукцией вплоть до полного решения, представимого в явном виде. При этом начальные данные Коши непосредственно будут учтены при редукции (см. Приложение А).

3. Многие уравнения математической физики являются квазилинейными, например, уравнения Навье – Стокса. Приведем пример нелинейной **неквазилинейной** системы уравнений в частных производных из математической физики. Рассмотрим следующую систему уравнений двумерной несжимаемой стационарной жидкости [7].

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial x}=0, \tag{13}$$

$$u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial y}=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0. \tag{15}$$

Эти уравнения можно представить в виде:

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_x\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial\left(u_x^2+P\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u_xu_y\right)}{\partial y}=0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\left(u_xu_y\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(u_y^2+P\right)}{\partial y}=0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0. \tag{18}$$

Выражения (16), (17) представлены в дивергентном виде. Следовательно, они могут быть представлены в виде (подобно функции тока для жидкости) [5]:

$$u_x^2+P=-\frac{\partial\alpha}{\partial y}, \tag{19}$$

$$u_xu_y=\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \tag{20}$$

$$u_xu_y=\frac{\partial\beta}{\partial y}, \tag{21}$$

$$u_y^2+P=-\frac{\partial\beta}{\partial x}. \tag{22}$$

Из (19)–(22) следует, что

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\beta}{\partial y}, \tag{23}$$

$$u_y=\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{u_x}, \tag{24}$$

$$u_x^2 - u_y^2 = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}. \tag{25}$$

После подстановки (24) в (25) получаем уравнение

$$u_x^4 - \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) u_x^2 - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 = 0. \tag{26}$$

Решение уравнения (26) имеет вид

$$u_x^2 = \frac{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2}. \tag{27}$$

Очевидно, в формуле (27) можно оставить только знак «+». Из (27) следует, что

$$u_x = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2}}. \tag{28}$$

Из формулы (23) следует (условие «потенциальности»):

$$\alpha = \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \tag{29}$$

$$\beta = \frac{\partial \gamma}{\partial x}. \tag{30}$$

После подстановки (29), (30) в (28) получим, что

$$u_x = \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right)^2}}. \tag{31}$$

Выразим скорость через функцию тока из (15).

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{32}$$

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{33}$$

После подстановки (32), (33) в (31) и (29), (32), (33) в (20) получим два уравнения:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \mp \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} \right)^2}}. \tag{35}$$

Таким образом, мы получим систему (34), (35) из двух **неквазилинейных** дифференциальных уравнений для двух неизвестных γ и ψ, которую, как было показано, можно преобразовать к виду (4), (5), (7) (см.: [6, с. 54]).

4. Систему уравнений (4), (5), (7) или (1) можно преобразовать путем увеличения размерности на единицу всего к одному уравнению от одного неизвестного, где частная производная $\partial/\partial x_m$ присутствует в явном виде, то есть выражена через все остальные.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$V(\mathbf{x},\xi)=\sum_{v=1}^{p}B_v(\xi,\mathbf{x})S_v. \tag{36}$$

Продифференцируем (36) по переменной ξ $p-1$ раз:

$$\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left[V(\mathbf{x},\xi)\right]=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}\left[B_v(\xi,\mathbf{x})\right]S_v,\ n=1\ldots p-1. \tag{37}$$

Положим, что

$$\Delta=\left|a_{i,j}\right|=\left|\frac{\partial^{i-1}}{\partial\xi^{i-1}}\left[B_j(\xi,\mathbf{x})\right]\right|\neq 0,\ i,j=1\ldots p. \tag{38}$$

Этого можно добиться, например, положив $B_v(\xi,\mathbf{x})$, $v=1\ldots p$ равными степенным функциям от ξ.

Мы видим, что относительно p неизвестных S_v, $v=1\ldots p$, система уравнений (36), (37) линейна. Учитывая (38), выразим теперь эти неизвестные из системы (36), (37) в явном виде

$$S_v=\sum_{k=1}^{p}\beta_{v,k}(\xi,\mathbf{x})\frac{\partial^{k-1}V(\mathbf{x},\xi)}{\partial\xi^{k-1}},\ v=1\ldots p, \tag{39}$$

где $\beta_{v,k}(\xi,\mathbf{x})$, $v,k=1\ldots p$ – некоторые функции от $B_v(\xi,\mathbf{x})$, $v=1\ldots p$ и их производные по ξ.

Продифференцируем (36) по переменной x_m.

$$\frac{\partial V(\mathbf{x},\xi)}{\partial x_m}=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial B_v(\xi,\mathbf{x})}{\partial x_m}S_v+\sum_{v=1}^{p}B_v(\xi,\mathbf{x})\frac{\partial S_v}{\partial x_m}. \tag{40}$$

Мы предполагаем, что систему уравнений (1) можно преобразовать к виду (6). Подставим выражения (6) в формулу (40). Тогда

$$\frac{\partial V(\mathbf{x},\xi)}{\partial x_m}=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial B_v(\xi,\mathbf{x})}{\partial x_m}S_v+\sum_{v=1}^{p}B_v(\xi,\mathbf{x})F_v^m\left(\frac{\partial S_k}{\partial x_i},S_k,\mathbf{x}\right),\ i=1\ldots m-1,\ k=1\ldots p\,. \tag{41}$$

Если вместо S_v, $v=1\ldots p$ подставить в (41) их выражения в явном виде через функции $V(\mathbf{x},\xi)$ и ее производные по ξ из (39), то мы получим одно, в общем случае **нелинейное**, дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $V(\mathbf{x},\xi)$ и ее производных.

Но при этом можно поставить соответствующую корректную задачу Коши на поверхности $x_m=0$, а именно $V(\mathbf{x},\xi)\big|_{x_m=0}=\sum_{v=1}^{p}B_v(\xi,x_1,\ldots x_{m-1},0)S_v^0(x_1,\ldots x_{m-1})$, поскольку производная по переменной x_m явно выражена через все остальные. Если она имеет единственное решение (теорема Коши – Ковалевской этого не гарантирует), тогда величины S_v, $v=1\ldots p$, являющиеся решениями системы (1) с задачей Коши (8), могут быть сразу выписаны через $V(\mathbf{x},\xi)$ по формуле (39). В целом уравнение (41) является расширением системы уравнений (1) при фиксированных $B_v(\xi,\mathbf{x})$, $v=1\ldots p$, поскольку к нему могут быть заданы более общие начальные условия и не доказана единственность решения задачи Коши для него.

Рассмотрим функцию

$$V(\mathbf{x},\xi_1,\ldots\xi_{p-1})=\sum_{v=1}^{p}B_v(\xi_1,\ldots\xi_{p-1},\mathbf{x})S_v. \tag{42}$$

Продифференцируем (42) по переменным $\xi_1,...\xi_{p-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{p-1}\right)\right]=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[B_v\left(\xi_1,...\xi_{p-1},\mathbf{x}\right)\right]S_v,\ n=1...p-1. \tag{43}$$

Относительно p неизвестных $S_v,\ v=1...p$, система уравнений (42), (43) линейна. Выразим теперь эти неизвестные из системы (42), (43) в явном виде аналогично (39). При этом подберем коэффициенты при этих неизвестных $B_v\left(\xi_1,...\xi_{p-1},\mathbf{x}\right),\ v=1...p$, таким образом, чтобы выполнялся аналог условия (38). Если вместо $S_v,\ v=1...p$ подставить в (41) их выражения в явном виде через функции $V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{p-1}\right)$ и ее частные производные по $\xi_1,...\xi_{p-1}$ первого порядка, то мы получим одно, в общем случае нелинейное, дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{p-1}\right)$ и ее частных производных только **первого** и **второго** порядка. При этом также можно поставить корректную задачу Коши на поверхности $x_m=0$, а именно $V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{p-1}\right)\Big|_{x_m=0}=\sum_{v=1}^{p}B_v\left(\xi_1,...\xi_{p-1},x_1,...x_{m-1},0\right)S_v^0\left(x_1,...x_{m-1}\right)$, поскольку производная по переменной x_m явно выражена через все остальные. В случае ОДУ мы будем иметь одно уравнение в частных производных только **первого** порядка. Как и в предыдущем случае, мы имеем расширение системы (1).

Рассмотрим функцию

$$V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{mp-1}\right)=\sum_{v=1}^{p}B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)S_v+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)U_k^j\ . \tag{44}$$

Продифференцируем (44) также по переменным $\xi_1,...\xi_{mp-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{mp-1}\right)\right]=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)\right]S_v+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\xi_n}\left[C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)\right]U_k^j,$$

$$n=1...mp-1. \tag{45}$$

Мы видим, что относительно mp неизвестных $S_v,\ U_v^i,\ v=1...p,\ i=1...(m-1)$ система уравнений (44), (45) линейна. Можно выразить также эти неизвестные из системы (44), (45) в явном виде аналогично (39). При этом также можно подобрать коэффициенты при этих неизвестных $B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right),\ C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right),\ v,k=1...p,\ j=1...(m-1)$, таким образом, чтобы выполнялся аналог условия (38). Продифференцируем (44) по переменной x_m:

$$\frac{\partial V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{mp-1}\right)}{\partial x_m}=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)}{\partial x_m}S_v+\sum_{v=1}^{p}B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)\frac{\partial S_v}{\partial x_m}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)}{\partial x_m}U_k^j+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)\frac{\partial U_k^j}{\partial x_m}. \tag{46}$$

После подстановки в (46) уравнений (4), (5) и (7) получим, что

$$\frac{\partial V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{mp-1}\right)}{\partial x_m}=\sum_{v=1}^{p}\frac{\partial B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)}{\partial x_m}S_v+\sum_{v=1}^{p}B_v\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)F_v^m\left(U_k^i,S_k,\mathbf{x}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)}{\partial x_m}U_k^j+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}C_{j,k}\left(\xi_1,...\xi_{mp-1},\mathbf{x}\right)\frac{\partial U_k^m}{\partial x_j}, \tag{47}$$

где

$$\frac{\partial U_k^m}{\partial x_j}=\sum_{r=1}^{p}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{\partial F_k^m\left(U_v^i,S_v,\mathbf{x}\right)}{\partial U_r^l}\frac{\partial U_r^l}{\partial x_j}+\sum_{l=1}^{p}\frac{\partial F_k^m\left(U_v^i,S_v,\mathbf{x}\right)}{\partial S_l}\frac{\partial S_l}{\partial x_j}+\frac{\partial F_k^m\left(U_v^i,S_v,\mathbf{x}\right)}{\partial x_j}.$$

Если вместо $S_v, U_v^i,\ v=1...p,\ i=1...(m-1)$ из (44), (45) подставить в (47) их выражения в явном виде через функции $V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{mp-1}\right)$ и ее частные производные по $\xi_1,...\xi_{mp-1}$ первого порядка, то мы получим одно, в общем случае уже **квазилинейное**, дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $V\left(\mathbf{x},\xi_1,...\xi_{mp-1}\right)$ и ее частных производных только первого и второго порядка. Как можно видеть, количество переменных $\xi_1,...\xi_{mp-1}$ значительно увеличивается. Если исходные уравнения (4), (5) и (7) **линейные**, то уравнение (47) также линейное второго порядка. Как можно видеть, уравнение (47) напоминает некоторый закон сохранения с внешними источниками.

Возникает вопрос, нельзя ли так преобразовать систему УРЧП (4), (5), (7), чтобы она сводилась к одному унифицированному уравнению, возможно, большей размерности, а весь произвол в записи системы (4), (5), (7) учитывался только в начальных данных. Оказывается, что это возможно, если в задачу Коши (9), (10) ввести параметры (см. Приложение В).

5. В данной работе рассматриваются системы УрЧП первого порядка. Показывается, что задача Коши для этих систем уравнений может быть сведена к задаче Коши для одного квазилинейного (даже универсального) уравнения второго порядка, но с большей размерностью (большим количеством переменных). Вопрос о существовании и единственности решения такой задачи Коши не решен. Показывается возможность сведения задачи Коши для систем УрЧП к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений универсального вида, но с большей размерностью (путем обобщения начальных данных с помощью параметров), решая которую можно найти решение задачи Коши для исходной системы УрЧП.

В нашей работе также устанавливается связь между гидродинамическими уравнениями Эйлера и произвольными системами УрЧП первого порядка и предлагается новый способ их переопределения (см. Приложение А). А значит, к ним возможно применить прием снижения размерности, который представлен ранее в работах авторов [1–4]. В отличие от предыдущих работ авторов [1–4] этот способ переопределения носит общий характер и применим к широкому классу систем УрПЧ. Учитываются начальные данные у заранее заданной задачи Коши к этим уравнениям. В целом все это нужно для упрощения расчетов и поиска частных и общих решений, представимых в явном виде, у систем уравнений в частных производных. Это может быть учтено в новых программных комплексах для решения систем УрЧП на ЭВМ.

Приложение А

Переопределение систем УрЧП первого порядка с помощью уравнений Эйлера для потенциальной жидкости

Рассмотрим уравнения Эйлера сжимаемой потенциальной жидкости в трехмерном потоке [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}=0, \qquad (\text{A. }1)$$

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi, \qquad (\text{A. }2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{u}=0, \qquad (\text{A. }3)$$

где $\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{U}_0(\mathbf{r})=\nabla\varphi_0(\mathbf{r})$ – начальное распределение скорости $\mathbf{u}$, $P=P(\rho)$ – давление.

Уравнения (А. 1) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\left((\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})\nabla\right)\mathbf{u}=0, \qquad (\text{A. }4)$$

где вектор $\boldsymbol{\alpha}$ определяется из системы линейных относительно него уравнений

$$(\boldsymbol{\alpha}\nabla)\mathbf{u}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}. \qquad (\text{A. }5)$$

Рассмотрим замену переменных

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{u}(\mathbf{r},t)+\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r},t),\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_0,t)\ \text{и}\ \mathbf{r}_0=\mathbf{r}_0(\mathbf{r},t),\ \mathbf{r}_0|_{t=0}=\mathbf{r}. \qquad (\text{A. }6)$$

В этих переменных выражение (А. 4) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=0 \qquad (\text{A. }7)$$

или

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0(\mathbf{r}_0)=\nabla_0\varphi_0(\mathbf{r}_0), \qquad (\text{A. }8)$$

где $\nabla_0=(\partial/\partial x_0,\partial/\partial y_0,\partial/\partial z_0,)$. Замена переменных (А. 6) означает, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t}+(\mathbf{u}+\boldsymbol{\alpha})\cdot\nabla\mathbf{r}_0=0. \qquad (\text{A. }9)$$

Можно составить следующую переопределенную систему из 10 уравнений в частных производных: (А. 2), (А. 3), (А. 8), (А. 9) и 8 неизвестных $\mathbf{u}$, P, φ, $\mathbf{r}_0$. Начальные данные $\varphi_0(\mathbf{r}_0)$ должны быть такими, чтобы была корректна замена переменных (А. 5), (А. 6).

Введем обозначения:

$$\Pi(\mathbf{x},\xi)=\sum_{\nu=1}^{p}A_\nu(\xi)U_\nu^m,\ V_i(\mathbf{x},\xi)=\sum_{\nu=1}^{p}A_\nu(\xi)U_\nu^i,\ S(\mathbf{x},\xi)=\sum_{\nu=1}^{p}A_\nu(\xi)S_\nu,\ i=1...(m-1). \qquad (\text{A. }10)$$

Тогда систему уравнений (4), (5) можно преобразовать к виду:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_m}=\frac{\partial \Pi}{\partial x_i},\quad i=1...(m-1). \qquad (\text{A. }11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_m} = \Pi. \tag{А. 12}$$

К ним можно поставить следующую задачу Коши:

$$V_i\Big|_{x_m=0} = \sum_{v=1}^{p} A_v(\xi)\frac{\partial S_v^0(x_1,...x_{m-1})}{\partial x_i}, \quad i = 1...(m-1), \tag{А. 13}$$

$$S\Big|_{x_m=0} = \sum_{v=1}^{p} A_v(\xi) S_v^0(x_1,...x_{m-1}). \tag{А. 14}$$

Уравнение (А. 11) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_m} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)V_i + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \; i = 1...(m-1), \tag{А. 15}$$

где $P = -\Pi - \frac{1}{2}\mathbf{V}^2$, $\mathbf{V} = (V_1...V_{m-1})$ и $\nabla = (\partial/\partial x_1,...\partial/\partial x_{m-1})$.

Выражение (А. 15) напоминает уравнение (А. 1).

Выведем аналог дополнительных уравнений (А. 2) и (А. 3). Аналогично формуле (12) верно следующее выражение $V_i = \partial S/\partial x_i$, $i = 1...(m-1)$. Тогда уравнение (А. 12) можно записать в виде:

$$\frac{\partial S}{\partial x_m} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)S + P - \frac{1}{2}(\nabla S)^2 = 0. \tag{А. 16}$$

Продифференцируем выражения (А. 10) по переменной ξ $p-1$ раз:

$$\frac{\partial^n \Pi(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^n} = \sum_{v=1}^{p}\frac{\partial^n A_v(\xi)}{\partial \xi^n}U_v^m, \; \frac{\partial^n V_i(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^n} = \sum_{v=1}^{p}\frac{\partial^n A_v(\xi)}{\partial \xi^n}U_v^i, \; \frac{\partial^n S(\mathbf{x},\xi)}{\partial \xi^n} = \sum_{v=1}^{p}\frac{\partial^n A_v(\xi)}{\partial \xi^n}S_v,$$

$$n = 1...p-1. \tag{А. 17}$$

Мы видим, что относительно $(m+1)p$ неизвестных U_v^m, S_v, U_v^i, $v = 1...p$, $i = 1...(m-1)$ системы уравнений (А. 10), (А. 17) линейны. Выразим теперь эти неизвестные из систем (А. 10), (А. 17) в явном виде аналогично (39) [подберем коэффициенты при этих неизвестных $A_v(\xi)$, $v = 1...p$, чтобы выполнялся аналог условия (38)] и подставим их выражения в уравнения (7). В результате получим p уравнений вида:

$$U_v^m\left(\frac{\partial^l \Pi}{\partial \xi^l}, \Pi, \xi\right) = F_v^m\left(U_k^i\left(\frac{\partial^l V_i}{\partial \xi^l}, V_i, \xi\right), S_k\left(\frac{\partial^l S}{\partial \xi^l}, S, \xi\right), \mathbf{x}\right), \tag{А. 18}$$

$$i = 1...m-1, \; v,k = 1...p, \; l = 1...p-1\cdot$$

Таким образом, мы имеем систему уравнений (А. 15), (А. 16), (А. 18), которая переопределяется аналогично системе (А. 1)–(А. 3). При этом принимаются во внимание начальные данные Коши (А. 13), с помощью которых учитываются начальные условия (9) к системе уравнений (4), (5), (7). При этом мы рассматриваем случай только $m \geq 3$.

Приложение В

Унификация систем УрЧП первого порядка

Не ограничивая общности, рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v(\mathbf{x})$, $v=1...p$, $\mathbf{x}=(x_1,...x_m)\in\Re^m_{\mathbf{x}}$ вида

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m}=F_v^m\left(\frac{\partial S_k}{\partial x_i},S_k\right),\ i=1...m-1,\ v=1...p\,,\ k=1...p. \tag{В. 1}$$

Здесь $F_k^m(...)$, $k=1...p$ – некоторые гладкие, бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов $\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}}$, S_v, $v=1...p$.

Зависимость от $\mathbf{x}=(x_1,...x_m)$ в системе (1) всегда можно убрать, введя дополнительные неизвестные и соответствующим образом дополнив задачу Коши (8) (см.: [6, с. 54)]. Поставим для системы (В. 1) параметрическую задачу Коши:

$$S_v\Big|_{x_m=0}=S_v^0(x_1,...x_{m-1},C_r),\ v=1...p\,,\ r=1...m(p-1)+1\,. \tag{В. 2}$$

Обозначим

$$U_v^i=\frac{\partial S_v}{\partial x_i},\ v=1...p\,,\ i=1...m\,. \tag{В. 3}$$

Тогда также можно получить уравнения (4), (5), (7)

$$\frac{\partial U_v^i}{\partial x_m}=\frac{\partial U_v^m}{\partial x_i},\ i=1...(m-1),\ v=1...p\,, \tag{В. 4}$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m}=U_v^m,\ v=1...p\,. \tag{В. 5}$$

$$U_v^m=F_v^m\left(U_k^i,S_k\right),\ i=1...m-1,\ v=1...p\,,\ k=1...p\,. \tag{В. 6}$$

Преобразуем (В. 6) к виду, учитывая (В. 4) и (В. 5):

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial x_m}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^i}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial x_m}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^m}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial S_k}U_k^m,\ v=1...p\,. \tag{В. 7}$$

Рассмотрим параметрическую задачу Коши для системы УрЧП (В. 4), (В. 5) и (В. 7):

$$U_v^i\Big|_{x_m=0}=\frac{\partial S_v^0(x_1,...x_{m-1},C_r)}{\partial x_i},\ v=1...p\,,\ i=1...(m-1),\ r=1...m(p-1)+1\,, \tag{В. 8}$$

$$S_v\Big|_{x_m=0}=S_v^0(x_1,...x_{m-1},C_r),\ v=1...p\,,\ r=1...m(p-1)+1\,, \tag{В. 9}$$

$$U_v^m\Big|_{x_m=0}=F_v^m\left(\frac{\partial S_k^0(x_1,...x_{m-1},C_r)}{\partial x_i},S_k^0(x_1,...x_{m-1},C_r)\right), \tag{В. 10}$$

$$i=1...m-1,\ v=1...p\,,\ k=1...p\,,\ r=1...m(p-1)+1\,.$$

Согласно теореме Коши – Ковалевской в случае аналитичности всех функций в (В. 8), (В. 9) и (В. 10) аналитическое решение этой задачи существует и единственно в классе аналитических функций. Продифференцируем (В. 6) по переменным x_i, $i=1...(m-1)$ и C_r, $r=1...m(p-1)+1$. Имеем:

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^i}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial x_i},\ i=1...(m-1),\ v=1...p. \tag{В. 11}$$

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial C_r}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^i}{\partial C_r}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial F_v^m}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial C_r},\ r=1...m(p-1)+1,\ v=1...p. \tag{В. 12}$$

Из выражений (В. 7), (В. 11) и (В. 12) находим, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_v^m}{\partial x_m} & \dfrac{\partial U_1^m}{\partial x_1} & \dots & U_p^m \\ \dfrac{\partial U_v^m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial U_1^1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial S_p}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial U_v^m}{\partial C_{m(p-1)+1}} & \dfrac{\partial U_1^1}{\partial C_{m(p-1)+1}} & \dots & \dfrac{\partial S_p}{\partial C_{m(p-1)+1}} \end{vmatrix}=0,\ v=1...p. \tag{В. 13}$$

Это следует из того, что столбцы в матрицах определителей (В. 13) линейно связаны между собой согласно соотношениям (В. 7), (В. 11) и (В. 12).

Разложим определители (В. 13) по первому столбцу. Тогда

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial x_m}\Delta_{11}-\frac{\partial U_v^m}{\partial x_1}\Delta_{21}+\dots=0,\ v=1...p, \tag{В. 14}$$

где

$$\Delta_{11}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial U_1^1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial S_p}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial U_1^1}{\partial C_{m(p-1)+1}} & \dots & \dfrac{\partial S_p}{\partial C_{m(p-1)+1}} \end{vmatrix}. \tag{В. 15}$$

Предположим, что начальные данные Коши (В. 8), (В. 9) таковы, что выполняется условие $\Delta_{11}\neq 0$. Тогда уравнение (В. 14) корректно, и его можно записать вместо уравнения (В. 7). Особенность уравнения (В. 14) заключается в том, что в отличие от (В. 7) оно универсально и не зависит от конкретного вида выражений в исходной системе (В. 1). Конкретное выражение зависимостей $U_v^m=F_v^m\left(U_k^i,S_k\right)$, $i=1...m-1$, $v=1...p$, $k=1...p$, однозначно учитывается только из задачи Коши (В. 8), (В. 9) и (В. 10) и условия $\Delta_{11}\neq 0$ при $x_m=0$. В результате мы имеем универсальную систему УрЧП (В.4), (В.5) и (В.14), которая содержит все решения произвольной системы УрЧП (В.1). В нашей статье показывается, что эту систему можно преобразовать всего к одному унифицированному дифференциальному уравнению в частных производных от одного неизвестного.

Пример. Рассмотрим простое уравнение

$$\frac{dS}{dt}=F(S) \tag{В. 16}$$

с параметрической задачей Коши

$$S\big|_{t=0} = S_0(C),\ \frac{\partial S_0}{\partial C} \neq 0. \tag{В. 17}$$

Обозначим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U. \tag{В. 18}$$

Поставим к системе (В. 16), (В. 18) параметрическую задачу Коши:

$$S\big|_{t=0} = S_0(C),\ U\big|_{t=0} = F(S_0(C)). \tag{В. 19}$$

Из (В. 16) следует, что $U = F(S)$. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial F(S)}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial F(S)}{\partial S}U \ \text{ и } \ \frac{\partial U}{\partial C} = \frac{\partial F(S)}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial C}. \tag{В. 20}$$

Разделим почленно выражения (В. 20) одно на другое. Следовательно,

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial t}}{\dfrac{\partial U}{\partial C}} = \frac{U}{\dfrac{\partial S}{\partial C}} \tag{В. 21}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U}{\dfrac{\partial S}{\partial C}}\frac{\partial U}{\partial C}. \tag{В. 22}$$

Таким образом, унифицированная система уравнений (В. 18), (В. 22) с задачей Коши (В. 19) содержит все решения уравнения (В. 16) с задачей Коши (В. 17).

Докажем обратное. Пусть выполняются уравнения (В. 4), (В. 5) и (В. 14), с начальными условиями (В. 8)–(В. 10) и условие $\Delta_{11} \neq 0$ для любого x_m. Пусть неизвестные U_v^m, $v = 1...p$, записываются в виде

$$U_v^m = U_v^m\left(x_1,...x_{m-1},C_r,x_m\right),\ v = 1...p,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1. \tag{В. 23}$$

Из условия $\Delta_{11} \neq 0$ для любого x_m следует, что можно сделать локально замену переменных

$$U_v^i = U_v^i\left(x_1,...x_m,C_r\right),\ v = 1...p,\ i = 1...\left(m-1\right),\ r = 1...m\left(p-1\right)+1, \tag{В. 24}$$

$$S_v = S_v\left(x_1,...x_m,C_r\right),\ v = 1...p,\ r = 1...m\left(p-1\right)+1, \tag{В. 25}$$

$$x_m = x_m. \tag{В. 26}$$

В этих переменных выражение (В. 23) можно записать в виде

$$U_v^m = G_v\left(U_k^i\left(x_1,...x_m,C_r\right),S_k\left(x_1,...x_m,C_r\right),x_m\right),\ v = 1...p,\ i = 1...m-1,\ k = 1...p. \tag{В. 27}$$

Продифференцируем выражения (В. 27) по переменным x_m, x_i, $i = 1...\left(m-1\right)$ и C_r, $r = 1...m\left(p-1\right)+1$. Имеем:

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial x_m} = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^i}{\partial x_m} + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial x_m} + \frac{\partial G_v}{\partial x_m} = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^m}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial S_k}U_k^m + \frac{\partial G_v}{\partial x_m},\ v = 1...p, \tag{В. 28}$$

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^i}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial x_i},\ i=1\ldots(m-1),\ v=1\ldots p. \quad \text{(В. 29)}$$

$$\frac{\partial U_v^m}{\partial C_r}=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial U_k^i}\frac{\partial U_k^i}{\partial C_r}+\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial G_v}{\partial S_k}\frac{\partial S_k}{\partial C_r},\ r=1\ldots m(p-1)+1,\ v=1\ldots p. \quad \text{(В. 30)}$$

Из выражений (В. 28)–(В. 30) находим, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U_v^m}{\partial x_m}-\frac{\partial G_v}{\partial x_m} & \frac{\partial U_1^m}{\partial x_1} & \ldots & U_p^m \\ \frac{\partial U_v^m}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1^1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial S_p}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial U_v^m}{\partial C_{m(p-1)+1}} & \frac{\partial U_1^1}{\partial C_{m(p-1)+1}} & \ldots & \frac{\partial S_p}{\partial C_{m(p-1)+1}} \end{vmatrix}=0,\ v=1\ldots p. \quad \text{(В. 31)}$$

Это следует из того, что столбцы в матрицах определителей (В. 31) линейно связаны между собой согласно соотношениям (В. 28)–(В. 30). Разложим определители (В. 31) по первому столбцу. Тогда, учитывая (В. 14),

$$\left(\frac{\partial U_v^m}{\partial x_m}-\frac{\partial G_v}{\partial x_m}\right)\Delta_{11}-\frac{\partial U_v^m}{\partial x_1}\Delta_{21}+\ldots=-\frac{\partial G_v}{\partial x_m}\Delta_{11}=0,\ v=1\ldots p. \quad \text{(В. 32)}$$

Из условия $\Delta_{11}\neq 0$ для любого x_m, из (В. 32) следует, что $\partial G_v/\partial x_m=0$, $v=1\ldots p$.

Таким образом, из (В. 27) следует, что $U_v^m=G_v\left(U_k^i,S_k\right)$, $v=1\ldots p$, $i=1\ldots m-1$, $k=1\ldots p$, а из условия (В. 10) следует, что выполняется уравнение (В. 6), что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В. Б. Аккерман, М. Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 8. – С. 1518–1530.

2. Зайцев, М. Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 5–27.

3. Зайцев, М. Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2016. – № 6 (37). – С. 119–127.

4. Зайцев, М. Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20, № 4. – С. 43–67.

5. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Дрофа, 2003. – Т. 1. – 704 с.

6. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М. : Мир, 1964. – 830 с.

7. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. VI : Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986. – 736 с.

8. Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М. : Высш. шк., 1977. – 431 с.

9. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их применения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.

10. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1966. – 742 с.

REFERENCES

1. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyakh gidrodinamiki [Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2011, vol. 8, no. 2, pp. 1418-1430.
2. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki [Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and Its Application to Equations of Hydrodynamics]. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika*, 2015, no. 2, pp. 5-27.
3. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Eshche odin sposob nakhozhdeniya chastnykh resheniy uravneniy matematicheskoy fiziki [Another Method for Finding Particular Solutions of Equations of Mathematical Physics]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 6 (37), pp. 119-127.
4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduktsiya pereopredelennykh sistem differentsialnykh uravneniy matematicheskoy fiziki [Reduction of Overdetermined Differential Equations of Mathematical Physics]. *Matematicheskaya fizika i kompyuternoe modelirovanie* [Mathematical Physics and Computer Simulation], 2017, vol. 20, no. 4, pp. 43-67.
5. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza: v 3 t.* [The Course of Mathematical Analysis: in 3 vols.]. Moscow, Drofa Publ., 2003, vol. 1. 704 p.
6. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p.
7. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VI: Gidrodinamika* [The Course of Theoretical Physics. Vol. 6: Fluid Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p.
8. Mikhlin S.G. *Lineynye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1977. 431 p.
9. Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh primeneniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 688 p.
10. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [The Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 742 p.

TRANSFORMATION OF SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SYSTEMS OF QUASILINEAR AND LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS. THEIR REDUCTION AND UNIFICATION

Maksim Leonidovich Zaytsev

Postgraduate Student,
Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences
mlzaytsev@gmail.com
Bolshaya Tulskaya St., 52, 115191 Moscow, Russian Federation

Vyacheslav Borisovich Akkerman

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
West Virginia University
Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
WV 26506-6106 Morgantown, USA

Abstract. The paper deals with first-order PDE systems. The purpose of this paper is to investigate some general properties of first-order PDE systems and the possibility of their simplification (reduction), using the results obtained earlier by the authors. In previous works of the authors, the possibility of reducing the dimensionality of overdetermined systems of differential equations was shown. The task was to obtain, as much as possible, and as better as possible, the overrides of the broad classes of PDE. Earlier, overdeterminations of the equations of hydrodynamics and ODE were obtained, and an assumption was made about the possibility of overriding of any PDE systems. In the first half of our work, we give a new way to override any PDEs of the first order and in doing so we try to take into account that the general solutions of this extended system of equations contain only solutions to a pre-defined Cauchy problem. This is advantageous in the sense that then our method of diminishing the dimensionality theoretically can reduce the dimension of these equations up to a complete solution of the Cauchy problem, which can be represented explicitly. In addition, we also establish a link between Euler's hydrodynamic equations and arbitrary first-order PDE systems.

In the second part of this paper, we consider the reduction of PDE systems to just one quasi-linear (even universal) evolution equation of the second order from the one unknown. This increases the number of variables, and the new problems arise for the study. It shows that the Cauchy problem for these systems of equations can be reduced to the Cauchy problem for a second-order quasilinear equation, but with a larger dimension. The question of the existence and uniqueness of the solution of such a Cauchy problem is not solved.

It has long been well known that there is a general way of transforming the PDE systems to systems of first-order quasilinear differential equations. This fact is used in the proof of the Cauchy-Kovalevskaya theorem, the main theorem of the theory of partial differential equations. In our work, further progress is made in the study of this issue. We study the unification of the first-order PDE systems using the parameterization of the Cauchy problem.

Key words: partial differential equations, Cauchy problem, dimension of differential equations, quasilinear partial differential equations, ODE, overdetermined systems of differential equations, Euler equations.