DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.1.2

УДК 517.521.1
ББК 22.161

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ С УНИМОДАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

Илья Васильевич Гермашев

Доктор технических наук, профессор кафедры математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
germashev@volsu.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Евгения Вячеславовна Дербишер

Кандидат технических наук, доцент кафедры аналитической, физической химии
и физико-химии полимеров,
Волгоградский государственный технический университет
derbisher1@yandex.ru
просп. им. В.И. Ленина, 28, 400005 г. Волгоград, Российская Федерация

Вячеслав Евгеньевич Дербишер

Доктор химических наук, профессор кафедры технологии
высокомолекулярных и волокнистых материалов,
Волгоградский государственный технический университет
derbisher-28091945@yandex.ru
просп. им. В.И. Ленина, 28, 400005 г. Волгоград, Российская Федерация

Наталья Юрьевна Куликова

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры информатики
и методики преподавания информатики,
Волгоградский государственный социально-педагогический университет
notia7@mail.ru
просп. им. В.И. Ленина, 27, 400005 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. При решении прикладных задач методами нечеткой математики часто возникает необходимость проводить операции над нечеткими числами. Вычисление таких выражений требует довольно сложных манипуляций и существенных усилий. Например, использование *L-R* нечетких чисел позволяет получить формулы для вычисления сложения и вычитания нечетких чисел, но умножение и деление удается вычислять лишь приближенно. Для реализации арифметики трапециевидных чисел используются *t*-нормы и интервальная математика. Представлены нечеткие числа с унимодальной функцией принадлежности, нашедшие применение при нечетком анализе таких предметных областей, как экология, химическая технология. Знание о поведении таких числовых рядов позволит более эффективно анализировать подобные математические модели. Поскольку операция сложения ассоциативна, то это позволяет эффективно анализировать числовые ряды. Рассмотрена задача о сходимости ряда нечетких чисел с унимодальной функцией принадлежности. Получены формулы для вычисления арифметических операций с последовательностями нечетких чисел. Обобщена формула сложения для последовательности нечетких чисел. Исследована сходимость рядов нечетких чисел. При этом получены условия, при которых ряд расходится. Установлено, что вычисления с большим числом нечетких данных может приводить к неопределенности результата. Это обусловлено тем, что сумма ряда имеет функцию принадлежности, тождественно равную единице. Это означает полную неопределенность результата и позволяет сделать заключение о расходимости ряда. Полученные результаты для вычисления арифметических операций позволяют применять нечеткий анализ для исследования сложных систем, например, в экологии или в химической технологии. Предлагаемый подход носит достаточно общий характер и может применяться для довольно широкого класса исследований с применением методов нечеткого анализа. В этом случае имеет смысл ограничить длину последовательности нечетких чисел исходя из компромисса точности вычислений и степени неопределенности результата.

Ключевые слова: нечеткие числа, арифметические операции, ассоциативность, ряд нечетких чисел, сходимость ряда.

Введение

При решении прикладных задач методами нечеткой математики часто возникает необходимость проводить операции над нечеткими числами. Вычисление таких выражений требует довольно сложных манипуляций и существенных усилий. Для решения подобных задач обычно пользуются тем, что вид функции принадлежности, как правило, заранее неизвестен и, следовательно, выбор какой-либо функции не лучше и не хуже, чем выбор другой.

В таком случае разумно выбрать такую функцию, для которой вычисления операций над нечеткими числами подчиняются определенным законам. Например, использование *L-R* нечетких чисел позволяет получить формулы для вычисления сложения и вычитания нечетких чисел, но умножение и деление удается вычислять лишь приближенно [5; 6]. Предлагаемые методы вычисления арифметических операций базируются на комбинации принципа обобщения Заде и интервальной математики.

В работе [9] для реализации арифметики трапециевидных чисел использовались t-нормы и интервальная математика.

Наши исследования также базируются на принципе обобщения Заде. Но при вычислении произведения и частного мы отошли от этого принципа, благодаря чему удалось обеспечить ассоциативность и дистрибутивность [2].

Ассоциативность позволяет корректно вычислять ряды чисел, поскольку порядок сложения не влияет на результат. Задача вычисления ряда чисел имеет также и прикладное значение. В качестве примера можно привести экологическую проблему [3] или анализ технических систем [4], при решении которых возникают ряды нечетких чисел, и знание о поведении таких числовых рядов позволит более эффективно анализировать подобные математические модели.

В данной работе исследуется сходимость ряда нечетких чисел.

1. Предварительные сведения

Далее рассматривается класс функций принадлежности, который позволяет производить операции над нечеткими числами на регулярной основе [8].

Определение 1.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to [0;\ 1]$, $f \in U(\mathbb{R})$,

$\exists\, q \in \mathbb{R}\colon f(q) = \max\limits_{x \in \mathrm{R}} f(x) = 1$,

$\exists\, \delta > 0,\ h > 0\colon f(x) \geq h \Leftrightarrow q - \delta \leq x \leq q + \delta$,

$f(x) = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x - q)^2 + c$, $b^2 > 0$,
тогда класс таких функций $f(x)$ обозначим через $\Re(\mathbb{R})$. Здесь через $U(\mathbb{R})$ обозначается класс строго унимодальных функций в смысле, изложенном в [1]. В работе [8] было показано, что параметр c является инвариантом относительно b^2 и q, то есть если заданы числа

$$u_1(x) = g(b_1^2(x-q_1)^2+c_1),\ u_2(x) = g(b_2^2(x-q_2)^2+c_2) \in \Re(\mathbb{R}),$$

то $c_1 = c_2$. Поскольку в дальнейшем будет использоваться одна и та же функция $g(x)$, то везде будем писать просто c.

Будем рассматривать нечеткие числа с функцией принадлежности из $\Re(\mathbb{R})$. Для таких чисел в работе [2] была введена операция сложения:
для операции $u = u_1 + u_2$ выполнено

$$q = q_1 + q_2,\ b^2 = \frac{b_1^2 b_2^2}{(|b_1|+|b_2|)^2},$$

где u, u_1, $u_2 \in \Re(\mathbb{R})$.

2. Сумма ряда нечетких чисел

Пусть задан ряд нечетких чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \in \Re(\mathbb{R})$, причем $u_i(x) = g(b_i^2(x-q_i)^2+c)$, $i = 1, 2, \ldots$ Будем исследовать сумму $v = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$ на сходимость.

Для этого необходимо рассмотреть сходимость последовательности частичных сумм $v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $n = 1, 2, \ldots$

Поскольку сложение ассоциативно, то вопрос сходимости последовательности $v_n(x) = g(b_{vn}^2(x-q_{vn})^2+c)$ сводится к сходимости последовательностей q_n и b_n^2.

$q_{vn} = \sum_{i=1}^{n} q_i$ представляет собой последовательность частичных сумм ряда $\sum_{i=1}^{\infty} q_i$ вещественных чисел, поэтому здесь можно применить общеизвестные методы математического анализа и далее рассматриваться не будет.

Со вторым параметром немного сложнее. Выше получена формула для вычисления параметра b^2 суммы двух нечетких чисел. Получим аналогичную формулу для суммы $\sum_{i=1}^{n} u_i$, а именно

$$b_{vn}^2 = \frac{\prod_{i=1}^{n} b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |b_j|\right)^2}. \tag{1}$$

Докажем (1) по математической индукции.

Выше было показано, что (1) верно для $n = 2$. Пусть (1) верно для $n - 1$. Покажем, что (1) верно и для n. Имеем для $u_{vn-1} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ $b_{vn-1}^2 = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} |b_j|\right)^2}$. Поскольку $u_{vn} = u_{vn-1} + u_n$. Тогда

$$b^2=\frac{b'^2b_n^2}{\left(|b'|+|b_n|\right)^2}=\frac{\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}|b_j|\right)^2}b_n^2}{\left(\left|\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}b_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}|b_j|}\right|+|b_n|\right)^2}=$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}|b_j|\right)^2\left(\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}|b_i|+|b_n|\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}|b_j|}{\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}|b_j|}\right)^2}=\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^2}{\left(\prod_{i=1}^{n-1}|b_i|+|b_n|\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n-1}|b_j|\right)^2}=\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|b_j|\right)^2}.$$

Таким образом, формула (1) верна.

Теперь вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}b_{vn}^2$, для чего преобразуем элемент последовательности b_{vn}^2.

$$b_{vn}^2=\frac{\prod_{i=1}^{n}b_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|b_j|\right)^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n}|b_i|}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|b_j|\right)^2}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|b_i|}\right)^2}.$$

Полагая, что $\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\dfrac{1}{|b_i|}\right)=+\infty$, перейдем в равенстве

$$b_{vn}^2=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|b_i|}\right)^2}$$

к пределу при $n\to\infty$ и получим

$$\lim_{n\to\infty}b_{vn}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{|b_i|}\right)^2}=0.$$

Получили, что последовательность частичных сумм $v_n(x)=g(b_{vn}^2(x-q_{vn})^2+c)$ при $n\to\infty$ стремится к $g(0\cdot(x-\lim\limits_{n\to\infty}q_{vn})^2+c)=g(c)=1$. Таким образом, в случае сходимости последовательности частичных сумм q_{vn}, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n(x)=1$. Это означает полную неопределенность, а значит расходимость ряда $v=\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i$. Если же $\lim\limits_{n\to\infty}q_{vn}=+\infty$, то

$$v(x) = g(0 \cdot (x - \lim_{n\to\infty} q_{vn})^2 + c) = g(0 \cdot (+\infty) + c).$$

Неопределенность $0 \cdot (+\infty)$ может быть равна либо неотрицательной константе, либо $+\infty$. В любом случае, поскольку значения функции ограничены отрезком [0; 1] (так как $g(b^2(x-q)^2 + c) \in \Re(\mathbb{R})$), имеем

$$v(x) = g(0 \cdot (+\infty) + c) = d \in [0;\ 1].$$

Значит и в случае $\lim_{n\to\infty} q_{vn} = +\infty$ имеем полную неопределенность. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть задана последовательность нечетких чисел $u_i(x) = g(b_i^2(x-q_i)^2 + c) \in \Re(\mathbb{R})$ таких, что $\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{|b_i|}\right) = +\infty$, тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ расходится.

Заключение

Полученные результаты для вычисления арифметических операций позволяют применять нечеткий анализ для исследования сложных систем, например, в экологии [3] или в химической технологии [4; 7]. Хотя полученные результаты применимы только для функций принадлежности из класса $\Re(\mathbb{R})$, но выбор функции принадлежности не носит определяющего значения, что было показано в работе [8]. Поэтому предлагаемый подход носит достаточно общий характер и может применяться для довольно широкого класса исследований с применением методов нечеткого анализа.

Но надо иметь в виду, что вычисления с большим числом нечетких данных (как было показано в теореме 1) может вести к неопределенности результата. В этом случае имеет смысл ограничить длину последовательности нечетких чисел исходя из компромисса точности вычислений и степени неопределенности результата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

2. Гермашев, И. В. Вычисление арифметических операций над нечеткими числами для анализа сложных систем / И. В. Гермашев, Е. В. Дербишер, В. Е. Дербишер // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-29 : сб. тр. XXIX Междунар. науч. конф. : в 12 т., С.-Петерб. гос. технол. ин-т (техн. ун-т), 31 мая – 3 июня 2016 г. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. гос. технол. ин-та, 2016. – Т. 2. – С. 63–65.

3. Гермашев, И. В. Модель оценки сукцессионного возраста экосистемы водоемов / И. В. Гермашев, Г. Ю. Клинкова // Математические методы в технике и технологиях : сб. тр. 27-й междунар. конф., г. Тамбов, 3–5 июня 2014 : в 12 т. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2014. – Т. 7. – С. 5–7.

4. Оценка качества технических объектов с использованием нечетких множеств / И. В. Гермашев, В. Е. Дербишер, Т. Ф. Морозенко, С. А. Орлова // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2001. – Т. 67, № 1. – С. 65–68.

5. Dubois, D. Operations on fuzzy numbers / D. Dubois, H. Prade // Int. J. Systems Sci. – 1978. – Vol. 9, № 6. – P. 613–626. – DOI: 10.1080/00207727808941724.

6. Elementary Operations on L-R Fuzzy Number / A. Alim, F. T. Johora, S. Babu, A. Sultana // Advances in Pure Mathematics. – 2015. – № 5. – P. 131–136. – DOI: 10.4236/apm.2015.53016.

7. Germashev, I. V. Fuzzy Optimization of Polymer Compositions / I. V. Germashev, V. E. Derbisher // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2001. – Vol. 35, № 4. – P. 418–421. – DOI: 10.1023/A:1010443607682.

8. Germashev, I. V. Properties of unimodal membership functions in operations with fuzzy sets / I. V. Germashev, V. E. Derbisher // Russian Mathematics (Iz. VUZ). – 2007. – Vol. 51, № 3. – P. 73–76. – DOI: 10.3103/S1066369X07030115.

9. Koroteev, M. V. Arithmetic of fuzzy numbers in generalized trapezoidal form / M. V. Koroteev, P. V. Terelyanskii, V. A. Ivanyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 216, № 5. – P. 696–701. – DOI: 10.1007/s10958-016-2931-x.

REFERENCES

1. Vasilyev F.P. *Chislennye metody resheniya ekstremalnykh zadach* [Numerical methods of extremum problems solution]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 552 p.
2. Germashev I.V., Derbisher E.V., Derbisher V.E. Vychislenie arifmeticheskikh operatsiy nad nechetkimi chislami dlya analiza slozhnykh sistem [Calculation of arithmetic operations on fuzzy numbers for analysis of complex systems]. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT-29: sb. tr. XXIX Mezhdunar. nauch. konf.: v 12 t., S.-Peterb. gos. tekhnol. in-t (tekhn. un-t), 31 maya – 3 iyunya 2016 g.* [Mathematical Methods in Engineering and Technology – MMTT-29: Collected Works of the 29th International Academic Conference (Saint Petersburg, May 31 – June 3, 2016): in 12 vols.]. Saint Petersburg, SPbGTI Publ., 2016, vol. 2, pp. 63-65.
3. Germashev I.V., Klinkova G.Yu. Model otsenki suktsessionnogo vozrasta ekosistemy vodoemov [Model of estimation of successional age of acquatic ecosystem]. *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh: sb. tr. 27-y mezhdunar. konf., g. Tambov, 3–5 iyunya 2014: v 12 t.* [Mathematical Methods in Engineering and Technology – MMTT-29: Collected Works of the 27th International Academic Conference (Tambov, June 3-5, 2014): in 12 vols.]. Tambov, TGTU Publ., 2014, vol. 7, pp. 5-7.
4. Germashev I.V., Derbisher V.E., Morozenko T.F., Orlova S.A. Otsenka kachestva tekhnicheskikh obyektov s ispolzovaniem nechetkikh mnozhestv [The Assessment of Technical Objects Using Fuzzy Sets]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostic of Materials], 2001, vol. 67, no. 1, pp. 65-68.
5. Dubois D., Prade H. Operations on fuzzy numbers. *Int. J. Systems Sci*., 1978, vol. 9, no. 6, pp. 613-626. DOI: 10.1080/00207727808941724.
6. Alim A., Johora F.T., Babu S., Sultana A. Elementary Operations on L-R Fuzzy Number. *Advances in Pure Mathematics*, 2015, no. 5, pp. 131-136. DOI: 10.4236/apm.2015.53016.
7. Germashev I.V., Derbisher V.E. Fuzzy Optimization of Polymer Compositions. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2001, vol. 35, no. 4, pp. 418-421. DOI: 10.1023/A:1010443607682.
8. Germashev I.V., Derbisher V.E. Properties of unimodal membership functions in operations with fuzzy sets. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2007, vol. 51, no. 3, pp. 73-76. DOI: 10.3103/S1066369X07030115.
9. Koroteev M.V., Terelyanskii P.V., Ivanyuk V.A. Arithmetic of fuzzy numbers in generalized trapezoidal form. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 216, no. 5, pp. 696-701. DOI: 10.1007/s10958-016-2931-x.

CONVERGENCE OF SERIES OF FUZZY NUMBERS WITH UNIMODAL MEMBERSHIP FUNCTION

Ilya Vasilyevich Germashev

Doctor of Technical Sciences,
Professor, Department of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
germashev@volsu.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Evgeniya Vyacheslavovna Derbisher

Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor, Department of Analytical, Physical Chemistry and Physico-Chemistry of Polymers,
Volgograd State Technical University
derbisher1@yandex.ru
Prosp. Lenina, 28, 400005 Volgograd, Russian Federation

Vyacheslav Evgenyevich Derbisher

Doctor of Chemical Sciences, Professor, Department of High-Molecular
and Fibrous Materials Technology,
Volgograd State Technical University
derbisher-28091945@yandex.ru
Prosp. Lenina, 28, 400005 Volgograd, Russian Federation

Natalya Yuryevna Kulikova

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Science and Methods of Computer Studies Teaching,
Volgograd State Social-Pedagogical University
notia7@mail.ru
Prosp. Lenina, 27, 400005 Volgograd, Russian Federation

Abstract. Solving the applied problems by the methods of fuzzy mathematics frequently generates the need to conduct operations on fuzzy numbers. The calculation of such expressions requires quite complex manipulations and a serious effort. For example, addition and subtraction formulae can be obtained by *L-R* fuzzy numbers, but this approach enables to calculate multiplication and division only approximately. *t*-norms and interval mathematics are used to implement the arithmetics of trapezoidal numbers. We present fuzzy numbers with unimodal membership functions that can be used for fuzzy analysis in such subject fields as ecology and chemical technology. Some knowledge of behavior of these series enable us to analyze such mathematical models more effectively. The associativity of addition enables to analyze number series effectively. The problem of convergence of series of fuzzy numbers with unimodal membership function is considered. The formulae for calculating arithmetic operations on sequences of fuzzy numbers are obtained. We generalize the addition formula for sequences of fuzzy numbers. We investigate convergence of series of fuzzy numbers. The conditions for divergence of a series are given. It is shown that calculations with large amount of data may cause an indefinite result. The reason of this lies in the fact that a membership function of a sum of the series is identically equal to unit. This means the complete indefiniteness of the result and enables to make a conclusion about divergence of the series. The obtained results for evaluation of the arithmetic operations enable to use fuzzy analysis for investigation of complex systems in, for instance, ecology and chemical technology. The proposed approach is quite general and can be used for rather large class of studies using the methods of fuzzy analysis. In this case it makes sense to limit the length of sequences of fuzzy numbers on the compromise of calculation accuracy and indefiniteness of the result.

Key words: fuzzy numbers, arithmetical operations, associativity, series of fuzzy numbers, convergence of a series.