www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.1

УДК 517.5+514.174
ББК 22.15+22.16

О СОХРАНЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ ТРЕУГОЛЬНИКА ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Александр Юрьевич Игумнов

Кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры экономической теории, математики и информационных систем,
Волжский институт экономики, педагогики и права
IAJu1965@mail.ru
ул. Советская, 6, 404111 г. Волжский, Российская Федерация

Аннотация. В работе доказывается достаточный признак сохранения ориентации треугольника при квазиизометрическом отображении. Доказательство основано на использовании ранее введенного понятия расстояния между семействами точек (наборами нумерованных точек).

Ключевые слова: ориентация треугольника, квазиизометрические отображения, невырожденность треугольника, сетки, триангуляция, компьютерное моделирование.

Введение

Широко применяемый в компьютерном моделировании способ построения расчетных сеток — получение сетки из некоторой исходной посредством подходящего отображения; при этом должно быть обеспечено сохранение некоторых свойств. В случае если исходной сеткой является триангуляция некоторой области в $\mathbb{R}^2$, такими свойствами могут быть: невырожденность, ориентация, отношение смежности составляющих сетку треугольников. Исследованию условий сохранения подобных свойств посвящено большое количество работ, в которых применяется математический аппарат различной степени сложности. Классическим результатом здесь является теорема Альфорса о сохранении ориентации треугольника при квазиконформном отображении [1]. Из недавних работ укажем [2; 4–9]. Предлагаемый в данной работе признак можно рассматривать как обобщение теоремы Альфорса. Напомним ее формулировку.

Пусть $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $D \subset \mathbb{C}$ — некоторая область, $w = f(z)$ — C^1-гомеоморфизм на D, сохраняющий ориентацию ($|f_{\bar z}| < |f_z|$). Тогда

$$(|f_z| - |f_{\bar z}|)\,|dz| \le |d\,w| \le (|f_z| + |f_{\bar z}|)\,|dz|.$$

Величина

$$\mathrm{D}_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|} \ge 1$$

называется отклонением в точке z. Отображение f называется квазиконформным, если D_f ограничено. Отображение f называется K-квазиконформным, если $\mathrm{D}_f \le K$.

Теорема 1 ([1, гл. III. D]). *Пусть φ — некоторое K-квазиконформное отображение конечной плоскости на себя, причем $K < \sqrt{3}$. Тогда вершины любого равностороннего треугольника отображаются на вершины некоторого треугольника с той же ориентацией.*

Предлагаемое в данной работе обобщение теоремы 1 заключается в расширении класса отображений (до изометрических), расширении класса рассматриваемых треугольников (до произвольных треугольников), ослаблении оценки $K < \sqrt{3}$.

Напомним определение квазиизометрического отображения. Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : E \to \mathbb{R}^n$ называется квазиизометрическим, если при некоторых положительных числах $l \le L$ выполнено условие

$$\forall \quad x', x'' \in E \qquad l\,|x' - x''| \le |f(x') - f(x'')| \le L\,|x' - x''|. \tag{1}$$

Легко видеть, что если E — выпуклая область, то отображение, удовлетворяющее условию вида (1), является L/l-квазиконформным.

1. Предварительные сведения

Для формулировки и доказательства заявленного результата потребуются некоторые сведения из работы [3], где, в частности, предложена характеристика степени невырожденности треугольника и вычислено ее значение для равностороннего треугольника. Приведем необходимые сведения.

Отображение $F : I \to \mathbb{R}^n$, где $I = \{1, \dots, k\}$ — отрезок натуральных чисел, будем называть семейством k точек в $\mathbb{R}^n$ или k-точечным семейством. Табличное задание отображения F будем записывать как

$$F = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & & k \\ F(1) & F(2) & \cdots & F(k) \end{matrix} \right\}.$$

Пусть $f : F(I) \to \mathbb{R}^n$ — некоторое отображение. Композицию $f \circ F$ определим стандартным образом:

$$f \circ F = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & & k \\ f(F(1)) & f(F(2)) & \cdots & f(F(k)) \end{matrix} \right\}.$$

Пусть $\sigma : I \to I$ — некоторая перестановка. Композицию

$$F \circ \sigma = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & & k \\ F(\sigma(1)) & F(\sigma(2)) & \cdots & F(\sigma(k)) \end{matrix} \right\}$$

будем называть перенумерацией семейства F.

Для k-точечных семейств F, G зададим набор чисел $\mathcal{A}(F,G)$ как набор отношений расстояний между одинаково нумерованными парами точек семейств F, G за исключением отношений вида $\dfrac{0}{0}$:

$$\mathcal{A}(F,G)=\{\frac{|F(i)F(j)|}{|G(i)G(j)|},\ (i,j):\ 1\le i<j\le k,\ |F(i)F(j)|+|G(i)G(j)|>0\}$$

(здесь $|\dots|$ — евклидова длина отрезка); и определим величину ρ следующим образом:

$$\rho(F,G)=\begin{cases}0, \text{ если для всех } i,j \quad |F(i)F(j)|=0 \text{ и } |G(i)G(j)|=0;\\ \log\dfrac{\max\mathcal{A}(F,G)}{\min\mathcal{A}(F,G)}, \quad \text{иначе}\end{cases},$$

зафиксировав в качестве основания логарифма некоторое число, большее единицы, и полагая $\dfrac{a}{0}=+\infty$, $\log(+\infty)=+\infty$.

Величина ρ инвариантна относительно ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ (то есть для ортогональных преобразований $O',O'':\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ имеем $\rho(O'\circ F,O''\circ G)=\rho(F,G)$) и является расстоянием между классами ортогонально эквивалентных (то есть совмещаемых ортогональными преобразованиями) семейств, представителями которых являются семейства F, G. Далее величину $\rho(F,G)$ будем называть расстоянием (а также ρ-расстоянием) между семействами F, G. Если σ — некоторая перестановка, то, вообще говоря, $\rho(F\circ\sigma,G)\ne\rho(F,G)$.

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторое множество k-точечных семейств. Расстояние от k-точечного семейства F до множества $\mathcal{U}$ определим стандартным образом:

$$\rho(F,\mathcal{U})=\inf_{U\in\mathcal{U}}\rho(F,U).$$

Если множество $\mathcal{U}$ инвариантно относительно перенумерации (то есть из $U\in\mathcal{U}$ следует $\forall\sigma\ F\circ\sigma\in\mathcal{U}$), то $\rho((F\circ\sigma),\mathcal{U})=\rho(F,\mathcal{U})$ для любой перестановки σ (в работе [3] это утверждение явно не выделено). Везде далее подразумевается, что в соотношениях, содержащих обозначения ρ и $\log$, основание логарифма, указанного явно, и основание логарифма, подразумеваемого в обозначении ρ согласно определению этой величины, — одно и то же число, большее единицы.

Следующая теорема дает оценку расстояния, на которое смещается семейство под действием квазиизометрического отображения.

Теорема 2 ([3]). *Пусть $I=\{1,\dots,k\}$, где $k\ge 2$, и $F:I\to\mathbb{R}^n$ — семейство точек, имеющее хотя бы два различных значения. Пусть $f:F(I)\to\mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условию вида (1). Тогда*

$$\rho(F,f\circ F)\le\log\frac{L}{l}.$$

Рассмотрим случай трехточечных семейств в $\mathbb{R}^2$. Семейство $Y:\{1,2,3\}\to\mathbb{R}^2$ назовем коллинеарным, если его значения $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$ расположены на одной прямой. (В работе [3] такие семейства названы планарными.) Обозначим $\mathcal{P}$ множество коллинеарных семейств. Как показано в [3], вычисление значения $\rho(X,\mathcal{P})$, где X — некоторое трехточечное семейство, сводится к вычислению значений вида $\rho(X, Y)$ для конечного количества семейств $Y \in \mathcal{P}$; каждое из этих семейств строится определенным образом на основании семейства X (необходимые построения делаются циркулем и линейкой).

Далее, значения трехточечного семейства — вершины некоторого треугольника; если семейство коллинеарно, то этот треугольник вырожден. Обратно, если вершины треугольника ABC являются значениями семейства X, то они же будут значениями семейств вида $X \circ \sigma$ для любой перестановки σ. Поскольку множество $\mathcal{P}$, очевидно, σ-инвариантно, то $\rho(X \circ \sigma, \mathcal{P}) = \rho(X, \mathcal{P})$. На этом основании величину $\rho(X, \mathcal{P})$ будем называть расстоянием от треугольника до множества вырожденных треугольников, и словом треугольник будем обозначать как множество точек, определяемое этим термином в элементарной геометрии, так и трехточечное семейство.

В работе [3] дано явное выражение величины $\rho(X, \mathcal{P})$ через длины a, b, c сторон треугольника X:

$$\rho(X, \mathcal{P}) = \log \min\{\frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a}, \frac{a+c}{b}\} ,$$

и показано, что равносторонний треугольник является наиболее удаленным от множества вырожденных треугольников, а именно, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть X — трехточечное семейство в $\mathbb{R}^2$, $X(i) \neq X(j)$ при $i \neq j$. Тогда:*
1) $\rho(X, \mathcal{P}) \leq \log 2$;
2) $\rho(X, \mathcal{P}) = \log 2$ тогда и только тогда, когда значения семейства X являются вершинами равностороннего треугольника.

Таким образом, величина ρ может толковаться как степень невырожденности произвольного треугольника.

2. Основной результат

Уточним используемые далее понятия контура и отображения, сохраняющего ориентацию. Контуром в $\mathbb{R}^2$ будем называть замкнутую кривую без самопересечений. Пусть Γ — некоторый ориентированный контур. Будем говорить, что отображение $f : \Gamma \to \mathbb{R}^2$ сохраняет ориентацию контура Γ, если $f(\Gamma)$ — контур, и этот контур ориентирован одноименно с контуром Γ.

Пусть $T = ABC$ — некоторый треугольник; Γ_T — контур, образованный его сторонами. Очевидно, условие одноименности ориентации контуров Γ_T и $f(\Gamma_T)$ еще не обеспечивает одноименность ориентации треугольников ABC и $f(A)\,f(B)\,f(C)$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 4. *Пусть $T = ABC$ — ориентированный невырожденный треугольник в R^2; $f : \Gamma_T \to \mathrm{R}^2$ — отображение, удовлетворяющее условию (1) на множестве $\{A, B, C\}$ и сохраняющее ориентацию контура Γ_T. Если*

$$\log \frac{L}{l} < \rho(T, \mathcal{P}), \tag{2}$$

то треугольник $f(A)f(B)f(C)$ ориентирован одноименно с треугольником ABC.

Доказательство. Сначала отметим следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $f : D \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ —отображение, для которого выполнено условие (1); γ — спрямляемая кривая. Тогда*

$$l \cdot |\gamma| \leq |f(\gamma)| \leq L \cdot |\gamma|$$

($|\gamma|$ — длина кривой).
(Доказательство леммы сводится к представлению длины рассматриваемых кривых как предела последовательностей длин правильно вписанных ломаных и оценке длин звеньев этих ломаных согласно соотношению (1).)

Для определенности будем полагать ориентацию контура Γ положительной. Обозначим $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, T' — треугольник $A'B'C'$. Имеем: контур $f \circ \Gamma$ проходит через точки A', B', C' и его ориентация положительна. Предположим, что ориентация треугольника $T' = A'B'C'$ отрицательна. Геометрически очевидно, что контур $f \circ \Gamma$ гомотопен контуру вида Γ^*, который можно описать следующим образом. Из отрицательно ориентированного треугольника $A'B'C'$ исключается одна сторона. Концы оставшейся двузвенной ломаной, на звеньях которой задана ориентация, определенная ориентацией треугольника, соединяются ориентированной кривой. Ориентация и положение кривой задаются так, чтобы на получившейся замкнутой кривой было задано положительное направление обхода. Доказательство изложим для случая, когда исключаемая сторона есть отрезок $[A', C']$.
Имеем
$$|f([A,C])| \geq |A'B'| + |B'C'|. \tag{3}$$

Рассмотрим набор величин
$$\frac{|A'B'|}{|AB|},\ \frac{|B'C'|}{|BC|},\ \frac{|A'B'|+|B'C'|}{|AC|}. \tag{4}$$

Оценим их. По теореме 2, где полагаем $F = T$ и $f \circ F = T'$, имеем $\rho(T,T') \leq \leq \log \frac{L}{l}$, то есть
$$l \leq \frac{|A'B'|}{|AB|} \leq L\ , \tag{5}$$
$$l \leq \frac{|B'C'|}{|BC|} \leq L\ , \tag{6}$$
$$l \leq \frac{|A'C'|}{|AC|} \leq L\ . \tag{7}$$

Рассмотрим третью из величин набора (4). Из неравенства треугольника $|A'B'|+|B'C'| \geq \geq |A'C'|$ и левой части оценки (7) имеем
$$\frac{|A'B'|+|B'C'|}{|AC|} \geq l. \tag{8}$$

С другой стороны, из неравенства (8) (в прочтении справа налево) и правой части неравенства леммы, приведенной в начале доказательства,
$$l \cdot |\gamma| \leq |f(\gamma)| \leq L \cdot |\gamma|\ ,$$

где полагаем γ — двузвенная ломаная ABC, выводим
$$\frac{|A'B'|+|B'C'|}{|AC|} \leq L.$$

Таким образом,

$$l \leq \frac{|A'B'| + |B'C'|}{|AC|} \leq L. \tag{9}$$

Заметим теперь, что элементы набора (4) численно совпадают со значениями набора $\mathcal{A}(T, T'')$ для вырожденного треугольника $T'' = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ A' & B' & C'' \end{smallmatrix} \right\}$, где C'' — точка пересечения прямой $A'B'$ и окружности с центром в точке B' радиуса $|B'C'|$, расположенная правее точки B'. Из неравенств (5), (6), (9) выводим:

$$\rho(T, T'') \leq \log L/l. \tag{10}$$

С другой стороны, поскольку треугольник T'' вырожден, то

$$\rho(T, T'') \geq \rho(T, \mathcal{P}). \tag{11}$$

Из (10), (11) имеем $\log \frac{L}{l} \geq \rho(T, \mathcal{P})$, что противоречит неравенству (2) в условии теоремы.

Случаи другой расстановки наименований значений семейства $f \circ T$ рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Из теорем 3 и 4 выводим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть $T = ABC$ — правильный ориентированный треугольник в $\mathbb{R}^2$; $f : \Gamma_T \to \mathrm{R}^2$ — отображение, удовлетворяющее условию (1) на множестве $\{A, B, C\}$ и сохраняющее ориентацию контура Γ_T. Если $L/l < 2$, то треугольник $f(A)\, f(B)\, f(C)$ ориентирован одноименно с треугольником ABC.*

Доказательство. Из неравенств п. 1) и п. 2) в заключении теоремы 3 и неравенства в заключении теоремы 2 выводим:

$$\log \frac{L}{l} < \log 2 = \rho(T, \mathcal{P}).$$

Откуда по теореме 4 получаем требуемое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 154 с.

2. Болучевская, А. В. Сохранение ориентации симплекса при квазиизометричном отображении / А. В. Болучевская // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 1 (2). — С. 20–23.

3. Игумнов, А. Ю. Метризация пространства семейств точек в $\mathbb{R}^n$ и смежные вопросы / А. Ю. Игумнов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — Т. 37, № 6. — С. 40–54.

4. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 169–182.

5. Клячин, В. А. О линейных прообразах непрерывных отображений, сохраняющих ориентацию симплексов / В. А. Клячин, Н. А. Чебаненко // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — Т. 22, № 3. — С. 56–60.

6. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с.

7. Миклюков, В. М. Некоторые задачи, возникающие в проблеме триангуляции пограничного слоя / В. М. Миклюков // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2006. — Вып. 1. — С. 154–162.

8. Прохорова, М. Ф. Критерии гомеоморфизма в теории построения сеток / М. Ф. Прохорова // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2012. — Т. 52, № 5. — С. 878–882.

9. Прохорова, М. Ф. Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток / М. Ф. Прохорова // Тр. ИММ УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 1. — С. 112–129.

REFERENCES

1. Alfors L. *Lektsii o kvazikonformnykh otobrazheniyakh* [Lectures on Quasiconformal Mappings]. Moscow, Mir Publ., 1969. 154 p.

2. Boluchevskaya A.V. Sokhranenie orientatsii simpleksa pri kvaziizometrichnom otobrazhenii [Preserving the Orientation of a Simplex by Quasi-Isometric Mapping]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 1 (2), pp. 20-23.

3. Igumnov A.Yu. Metrizatsiya prostranstva semeystv tochek v $\mathbb{R}^n$ i smezhnye voprosy [Metrization in Space Families of Points in $\mathbb{R}^n$ and Adjoining Questions]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, vol. 37, no. 6, pp. 40-54.

4. Klyachin V.A. O gomeomorfizmakh, sokhranyayushchikh triangulyatsiyu [On Homomorphisms Preserving Triangulation]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, VolSU Publ., 2009, iss. 4, pp. 169-182.

5. Klyachin V.A., Chebanenko N.A. O lineynykh proobrazakh nepreryvnykh otobrazheniy, sokhranyayushchikh orientatsiyu simpleksov [About Linear Prototypes of the Continuous Mappings Preserving Orientation of Simplexes]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, vol. 22, no. 3, pp. 56-60.

6. Miklyukov V.M. *Vvedenie v negladkiy analiz* [Introduction to Non-Smooth Analysis]. Volgograd, VolSU Publ., 2008. 424 p.

7. Miklyukov V.M. Nekotorye zadachi, voznikayushchie v probleme triangulyatsii pogranichnogo sloya [Some of the Problems Arising in the Problem of Triangulation Boundary Layer]. *Zapiski seminara «Sverkhmedlennye protsessy»*. Volgograd, VolSU Publ., 2006, iss. 1, pp. 154-162.

8. Prokhorova M.F. Kriterii gomeomorfizma v teorii postroeniya setok [Criterions of Homeomorphism in the Theory of Grid Generation]. *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiz.*, 2012, vol. 52, no. 5, pp. 878-882.

9. Prokhorova M.F. Problemy gomeomorfizma, voznikayushchie v teorii postroeniya setok [Problems of Homeomorphism Arising in the Theory of Grid Generation]. *Tr. IMM UrO RAN*, 2008, vol. 14, no. 1, pp. 112-129.

ON PRESERVING THE ORIENTATION OF TRIANGLE UNDER QUASI-ISOMETRIC MAPPING

Alexander Yuryevich Igumnov

Candidate of Physical and Marhematical Sciences, Lecturer, Department
of Economic Theory, Mathematics and Information Systems,
Volzhsky Institute of Economics, Pedagogy and Law
IAJu1965@mail.ru
Sovetskaya St., 6, 404111 Volzhsky, Russian Federation

Abstract. In the article the sufficient sign of preserving the orientation of a triangle under quasi-isometric mapping is formulated and proved. The received result can be considered as synthesis of the Alfors' theorem on preserving the orientation of the exact triangle under quasiconformal mapping. The result is formulated for the arbitrariest triangle. It is shown that for an equilateral triangle, assessment characteristics of mapping are weaker than in the specified theorem. The proof is based on application of the concept of distance between families of points, discussed by us earlier.

Key words: orientation of triangle, quasiisometrique mapping, triangle non-degeneracy, meshes, triangulation, computer modeling.