



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.2.3>

УДК 539.374, 539.376

ББК 30.121

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СВОЙСТВ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ, ПОРОЖДАЕМЫХ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИЯМИ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЯХ¹

Андрей Владимирович Хохлов

Кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории упругости и пластичности НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, доцент кафедры механики композитов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
andrey-khokhlov@ya.ru
просп. Мичуринский, 1, 119192 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Аналитически изучены общие свойства кривых ползучести при произвольном ступенчатом нагружении, порождаемых линейным интегральным соотношением вязкоупругости Больцмана – Вольтерры с произвольной функцией ползучести и обобщающим его нелинейным определяющим соотношением Работнова с двумя материальными функциями, и их зависимость от характеристик материальных функций и параметров программ нагружения. Исследованы скачки деформации и ее скорости в моменты разрыва напряжения, интервалы монотонности и выпуклости, асимптотика кривых ползучести и их отклонения от обычной кривой ползучести при мгновенном нагружении, условия накопления пластической деформации, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику и остаточную деформацию, скорость рэтчетинга при циклических нагружениях, условия моделирования затухания памяти, асимптотической коммутативности, дрейфа мгновенно-упругой деформации вследствие ползучести.

Обнаруженные свойства теоретических кривых ползучести линейного и нелинейного соотношений сопоставлены друг с другом и с типичными свойствами экспериментальных кривых ползучести вязкоупругопластичных материалов с целью сравнения их областей применимости и возможностей по моделированию различных эффектов при ползучести. Выявлены сферы влияния материальных функций соотношения Работнова, его дополнительные возможности по описанию различных эффектов при ползучести и свойства, унаследованные им от линейного соотношения вязкоупругости.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, ступенчатое нагружение, кривые ползучести, асимптотика, обратная ползучесть, затухание памяти, накопление пластической деформации, рэтчетинг, асимптотическая коммутативность, регулярные и сингулярные модели.

Введение

Нелинейное определяющее соотношение (ОС) Работнова [1; 2; 4; 8; 10; 12–19; 23–26] описывает одномерные изотермические процессы деформирования структурно-стабильных

(нестареющих) реономных материалов, связывая истории напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ в данной точке тела:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $\Pi(t)$, $R(t)$ – функции ползучести и релаксации (ФП и ФР), а $\varphi(u)$ – дополнительная МФ, введенная Работновым. Входные процессы ($\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$) предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими на любом отрезке. Определяющее соотношение (ОС) (1) обобщает линейное ОС вязкоупругости, инвариантное относительно сдвигов по времени:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Если $\Pi(0+) \neq 0$ (модель регулярна), то $R(0+) < \infty$ и на пространстве *непрерывных* кусочно-гладких при $t \geq 0$ функций (взаимно обратные) операторы (1) и (2) представимы в виде

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = R(0)\varphi(\varepsilon(t)) + \int_0^t \dot{R}(t - \tau) \varphi(\varepsilon(\tau)) d\tau, \quad (3)$$

где $y(0)$ – краткое обозначение для предела справа $y(0+)$ функции $y(t)$ в т. $t = 0$. ОС (3), обобщающее линейное ОС (2) с регулярной ФП путем введения МФ φ , было предложено Ю.Н. Работновым в 1948 году [13]. В [10] оно называлось «соотношением наследственной теории пластичности» и «ползучести», в монографии [17, с. 209] – «наследственной теорией ползучести», в [18] было дано название «нелинейная теория наследственности». В англоязычных работах ОС (1) называется уравнением квазилинейной вязкоупругости («QLV») [27; 42–44; 48; 49; 51; 52; 55; 56; 58–61; 63], а его автором часто называется Y.C. Fung со ссылкой на его работы 1970–1990-х годов [55; 56]. В [1; 2; 4; 8; 10; 12–19; 23–26] ОС (1) прилагалось к описанию поведения стеклопластиков, графита, металлов, сплавов и композитов при разных режимах деформирования, а в [27; 42–44; 48; 49; 51; 52; 55; 56; 58–61; 63] – поведения связок, сухожилий и других биологических тканей (см. более подробный обзор в [28; 36]). Тщательное аналитическое изучение общих свойств основных теоретических квазистатических кривых (ползучести, релаксации, деформирования и т. п.) ОС (1) с произвольными МФ Π и φ , систематическое исследование комплекса моделируемых эффектов в зависимости от характеристик МФ и необходимых феноменологических ограничений на МФ φ (и следствий из них) не проводились в [1; 2; 4; 8; 10; 12–19; 23–26; 27; 42–44; 48; 49; 51; 52; 55; 56; 58–61; 63]; границы области применимости ОС (1) и их маркеры (за исключением требования подобия изохронных кривых ползучести в [1; 2; 4; 8; 10; 12–15] и подобия кривых релаксации в [51; 52; 58]) выявлены не были.

Цель данной статьи (а также цикла работ [28; 31; 36; 37; 41] и др.) – восполнить эти пробелы, выявить возможности и преимущества ОС (1) (как по сравнению с линейным ОС (2), так и с более сложными нелинейными ОС) и содействовать расширению и уточнению сферы его обоснованного применения в моделировании поведения реономных материалов с выраженной нелинейной наследственностью и скоростной чувствительностью (полимеров, композитов, пен, геотканей, керамик, асфальтобетонов, твердых топлив, алюминиевых и титановых сплавов, нержавеющей стали, связок, сухожилий, стенок сосудов и других биологических тканей и т. п.).

Испытания на ползучесть при ступенчатых нагружениях (с кусочно-постоянным напряжением) – важный вид квазистатических испытаний, позволяющий уловить и обследовать разные аспекты поведения материала и детали реализации многих эффектов [3; 5; 6; 9; 17; 19; 22; 45; 46; 54; 58; 62], собрать более богатую информацию для выбора, идентификации и верификации определяющих соотношений по сравнению с кривыми ползучести (КП) при постоянном напряжении (такие КП все модели описывают адекватно при правильной настройке). В частности, они позволяют обнаружить признаки нелинейности в поведении материала, исследовать зависимость кривых ползучести от уровня напряжения и предыстории нагружения, восстановление и остаточную деформацию при полной и частичной разгрузке, влияние параметров начальной стадии нагружения и перестановки ступеней нагружения, скорость затухания памяти, эффекты, сопровождающие скачок напряжения вниз или его быстрое убывание за малый промежуток времени (dip tests, non-monotonic creep behavior), влияние скачков напряжения на длительную прочность и отклонение от правила линейного суммирования поврежденности (Miner's rule, linear damage rule, cumulative damage theory) [3; 5; 6; 9; 14; 17; 19; 22; 28; 29; 32; 35; 38; 45–54; 57; 58; 62].

Задача данной статьи – анализ и сопоставление общих свойств кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, порожденных ОС (1) и (2) с произвольными МФ Π и Φ (связи скачков в точках разрыва программы нагружения, асимптотики КП, накопления пластической деформации, условий затухания памяти [32; 40], влияния перестановки ступеней нагружения и т. п.), – как унаследованных от КП линейного ОС (2) ([29; 32; 34]), так и новых.

В статье приняты следующие сокращения и обозначения: ΦP и $\Phi\Pi$ – функции релаксации и ползучести; $(\omega_-; \omega_+)$ и $(\underline{x}; \bar{x})$ – области определения и значений МФ $\Phi(u)$; $\Phi = \Phi^{-1}$; $h(t)$ – функция Хевисайда; $\delta(t)$ – дельта-функция; PeM – регулярные модели (с $\Phi\Pi$: $\Pi(0) \neq 0$); SiM – сингулярные модели (ΦP содержит слагаемое $\eta\delta(t)$); $\hat{y}(t_*) := y(t_* + 0) - y(t_* - 0)$ – скачок $y(t)$ в т. t_* .

Об ограничениях на материальные функции соотношения (1)

Линейное ОС вязкоупругости (2) получается из (1) при $\Phi(u) = u$ и содержит лишь одну независимую МФ, так как $\Phi\Pi$ и ΦP связаны условием взаимной обратности интегральных операторов (2) («the interconversion relation»):

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau) d\tau = t, \text{ или } \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau) d\tau + \Pi(0)R(t) = 1. \quad (4)$$

Зная ΦP , можно найти $\Phi\Pi$ из уравнения (4), и наоборот. Поэтому из трех МФ Φ , Π , R ОС (1) лишь две независимы, а тождество (4) является условием взаимной обратности операторов (1), отображающих друг в друга функции $\sigma(t)$ и $e(t) = \Phi(\varepsilon(t))$. На $\Phi\Pi$ и ΦP в ОС (1) наложим априори те же минимальные ограничения, что и в линейной теории: $\Pi(t)$ и $R(t)$ предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, $\Phi\Pi \Pi(t)$ – возрастающей и выпуклой вверх [34], а $\Phi P R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз на $(0; \infty)$, ΦP может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в т. $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$). Из этих условий, в частности, следует существование пределов $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$, $R(0+) = \sup R(t) > 0$ ($R(0+) = +\infty$, если ΦP не ограничена сверху) и $\dot{\Pi}(+\infty) \geq 0$ и $R(+\infty) \geq 0$ [34].

Свойства основных теоретических кривых линейного ОС (2) с произвольной ФП, необходимые математические и феноменологические ограничения на ФП и ФР проанализированы в цикле работ [29; 30; 32–34; 39] и др. Анализ, в частности, показал, что среди моделей, описываемых ОС (2) с произвольными ФР и ФП, необходимо выделять (как минимум) три основных класса, ибо качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются: 1) регулярные модели (РеМ) – у которых $\Pi(0) \neq 0$ (тогда мгновенный модуль $E = R(0+) = 1/\Pi(0+)$ конечен, а ОС (2) и первое уравнение (4) сводятся к уравнениям Вольтерры *второго* рода (3) с $\varphi(u) = u$ и (4)); 2) сингулярные (СиМ) – с ФР, содержащей слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ и входит слагаемым в ФР «половины» реологических моделей из пружин и демпферов), тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$; 3) нерегулярные модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемое $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$ ($R(0+) = +\infty$). Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР $R(t) = At^{-u}$, $u \in (0;1)$, $A > 0$, задающая так называемый «фрактальный» элемент «фрактальных» моделей (“fractional models”); соответствующая (в силу (4)) ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующему РеМ.

Линейным ОС (2) задаются, в частности, все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством параллельных и последовательных соединений (ФП классических моделей будут использованы для иллюстрации общих свойств КП ОС (1)). Схемы и названия всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в [39, рис. 1]. Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ- n и СиМ- n (структурно различные модели эквивалентны, если задаются одинаковыми семействами ФП или ФР). В частности, эквивалентны друг другу трехзвенные РеМ Пойнтинга-Томсона и Кельвина [39, рис. 1а], а все четыре РеМ-4 [39, рис. 1в] эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, то есть РеМ-2 и СиМ-2). Например, семейство

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (5)$$

удовлетворяет всем ограничениям, налагаемым на ФП. Оно порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, а при $\alpha = 0$ – все РеМ-3. Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (5) порождает СиМ, когда $\beta = \gamma$: при $\lambda\beta = 0$ – ньютоновскую жидкость, при $\alpha = 0$ – модель Фойгта, при $\alpha > 0$ – все СиМ-3 ($R = \eta\delta(t) + Ee^{-\lambda t}$). При $\gamma = 0$ (5) дает модель Максвелла.

На МФ $\varphi(u)$ в ОС (1) наложим следующие минимальные первичные требования [28; 31; 36; 37; 41]: $\varphi(u)$, $u \in (\omega_-; \omega_+)$, непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (где $\omega_- \omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ (иначе входному процессу $\epsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Формально возможны случаи $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$ и $\varphi'(0) = +\infty$. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии МФ φ нечетна и $\omega_- = -\omega_+$. Из возрастания $\varphi(u)$ следует существование обратной функции $\Phi := \varphi^{-1}$ на промежутке $D_\Phi = (\underline{x}; \bar{x})$, где $\bar{x} := \sup \varphi(u) = \varphi(\omega_+ - 0)$, $\underline{x} := \inf \varphi(u) = \varphi(\omega_- + 0)$,

и обратимость ОС (1). Величины \bar{x} и \underline{x} – важные характеристики МФ φ и Φ , существенно влияющие на поведение теоретических кривых ОС (1) [28; 31; 36; 37; 41].

Для задания МФ φ или Φ удобно, например, семейство функций

$$y(x) = A[\vartheta(x/C)^n + (1-\vartheta)(x/C)^m], \quad x \geq 0, \quad n > 1, \quad m < 1, \quad \vartheta \in [0; 1], \quad A, C > 0. \quad (6)$$

При всех значениях пяти параметров (кроме $\vartheta = 0; 1$) $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$, $y(C) = A$, $y(x)$ возрастает и имеет точку перегиба

$$\tilde{x} = Cq(n, m, \vartheta)^{1/(n-m)}, \quad q := m(1-m)(1-\vartheta)[n(n-1)\vartheta]^{-1}. \quad (7)$$

Действительно, $y'(x) = AC^{-1}[n\vartheta(x/C)^{n-1} + m(1-\vartheta)(x/C)^{m-1}]$, $y''(x) = Ax^{-2}[n(n-1)\vartheta(x/C)^n + m(m-1)(1-\vartheta)(x/C)^m]$, $y''(x) = 0$ равносильно (7). Весовой параметр $\vartheta \in (0; 1)$ позволяет совместить точку перегиба \tilde{x} с любой точкой $x > 0$ (и описать КП со всеми тремя стадиями [36]); семейство (6) убывает по ϑ на интервале $x \in (0; C)$ и возрастает на $(C; \infty)$. В случае $m = 1/n$ (7) принимает вид $\tilde{x} = C[(\vartheta^{-1} - 1)n^{-3}]^{n/(n^2-1)}$. При $\vartheta = 0,5$ $\tilde{x} = Cn^{-3n/(n^2-1)}$ и потому при $n \rightarrow 1$ $\tilde{x} \rightarrow Ce^{-1,5}$, а при $n \rightarrow \infty$ $\tilde{x} \rightarrow C$. Очевидно, при $n \rightarrow 1+0$ семейство (6) с $m = 1/n$ стремится к линейной функции $y = AC^{-1}x$, то есть МФ φ или Φ в ОС (1) «исчезает» и нелинейное ОС превращается в линейное ОС (2).

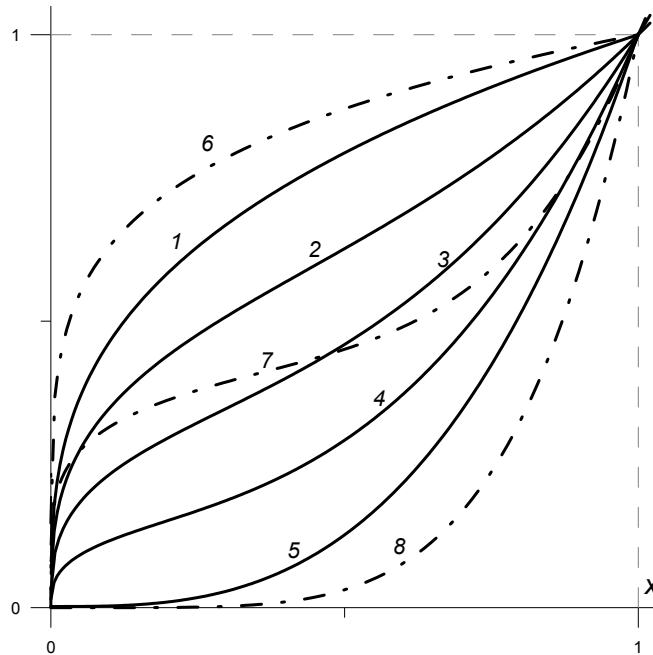


Рис. 1

На рисунке 1 приведены графики функций (6) с $m = 1/n$, $n = 3$, $A = C = 1$ и $\vartheta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ (кривые 1–5) и графики при $n = 5$ и $\vartheta = 0; 0,5; 1$ (кривые 6–8). С ростом n производные $\varphi(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ возрастают.

При $u < 0$ можно определить $\varphi(u)$ формулой $\varphi(u) = -y(-u)$, причем для разносопротивляющегося материала можно взять другой набор пяти параметров функции (6) (при этом начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = \infty$ обеспечивают гладкую склейку МФ φ в точке $u = 0$).

Кривые ползучести при постоянном напряжении

КП ОС (1) при мгновенном нагружении $\sigma(t) = \bar{\sigma} h(t)$, $\bar{\sigma} > 0$, имеют вид:

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t)) \text{ при } \bar{\sigma} \Pi(t) < \bar{x}, \quad (8)$$

где $\Phi := \varphi^{-1}$, $\bar{x} := \sup \varphi(u)$ – верхняя грань области определения $\Phi(x)$. Семейство КП (8) возрастает по $\bar{\sigma}$ (так как Φ возрастает), а при любом $\bar{\sigma} > 0$ КП возрастает по t на всем промежутке, где $\bar{\sigma} \Pi(t) < \bar{x}$.

Если $\bar{x} = \infty$ (как для линейного ОС, например), то $D_\Phi = [x; \infty)$ и КП определены при всех $\bar{\sigma} > 0$ и $t \geq 0$. Если же $\bar{x} < \infty$, то $\bar{\sigma} \Pi(t) \in D_\Phi$ только при $\bar{\sigma} < \bar{x} / \Pi(0)$ & $\Pi(t) < \bar{x} / \bar{\sigma}$; это означает, что КП существует только для напряжений $\bar{\sigma} < \sigma_*$, $\sigma_* := \bar{x} / \Pi(0)$ и обрывается в момент t_* , удовлетворяющий уравнению $\Pi(t_*) = \bar{x} / \bar{\sigma}$, если $\bar{\sigma} > \bar{x} / \Pi(\infty)$ (если $\Pi(\infty) < \infty$, КП с малым $\bar{\sigma}$ не обрывается). Таким образом, если $\bar{x} < \infty$ и $\Pi(0) \neq 0$, то параметр $\sigma_* := \bar{x} / \Pi(0) = E \bar{x}$ можно трактовать как предел (мгновенной) прочности при растяжении (если для моделируемого материала характерно разрушение, растрескивание или резкое изменение свойств при некотором критическом напряжении), и в ОС (1) уже встроен критерий разрушения. Если $\Phi(\bar{x}) < \infty$, то есть $\omega_+ < \infty$, разрушение при растяжении происходит по достижению критической деформации: $\varepsilon_* := \Phi(\bar{x}) = \omega_+$ (такой физический смысл можно придать параметру ω_+). Уравнение кривой длительной прочности при растяжении: $t_* = p(\bar{x} / \bar{\sigma})$, $E_\infty \bar{x} < \bar{\sigma} < E \bar{x}$, где $E := 1 / \Pi(0)$, $E_\infty := 1 / \Pi(\infty)$ – мгновенный и длительный модули линейного ОС (2) [39]. Из ограничений, наложенных на ФП, следует, что $t_*(\bar{\sigma})$ убывает (как и экспериментальные КДП), выпукла вниз и $t_*(\bar{\sigma}) \rightarrow \infty$ при $\bar{\sigma} \rightarrow E_\infty \bar{x}$. Отметим, что МФ $\varphi(x)$ практически не влияет на форму (и качественные свойства) кривых длительной прочности: лишь скалярный параметр \bar{x} управляет растяжением кривых вдоль оси напряжения.

КП линейного ОС (2) всегда выпуклы вверх на всем луче $t > 0$ (и потому оно не способно описывать поведение материалов, кривая ползучести которых включает стадию ускоряющейся ползучести [34]), а скорость ползучести всегда стремится при $t \rightarrow \infty$ к конечному пределу $V(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} v$, $v := \dot{\Pi}(\infty)$. Из наличия МФ φ в ОС (1) вытекают следующие *качественные отличия свойств его КП по сравнению с КП линейного ОС (2)* [36]: 1) зависимость КП (и скорости ползучести) от $\bar{\sigma}$ не линейная (изохронные КП не прямолинейны) и задается МФ $\Phi = \varphi^{-1}$; 2) КП не обязаны быть выпуклыми вверх, возможно наличие точек перегиба и моделирование КП со всеми тремя стадиями; для нелинейного ОС возможен случай стремления скорости ползучести к бесконечности как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow t_*$. 3) Если $\bar{x} < \infty$, то в ОС (1) встроен критерий разрушения, обеспечивающий обрыв КП и позволяющий моделировать длительную прочность. Подробный анализ свойств кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых ОС (1), проведен в работах [36; 37]. Разнообразие форм КП, которое позволяет получить вторая МФ φ ОС (1) по сравнению с КП линейного ОС (2), проиллюстрировано в работе [36] и на рисунке 2.

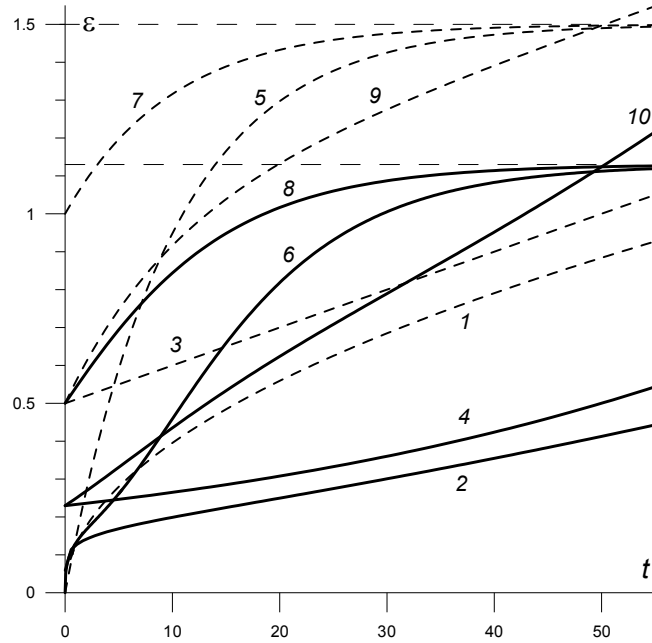


Рис. 2

На рисунке 2 приведены КП (8) (с $\bar{\sigma}=1$) линейной модели с ФП $\Pi(t) = t^{0.5} / 8$ (кривая 1), четырех линейных моделей вида (5): РеМ-2 (Максвелла) с $\gamma = 0, \alpha = 0,01, \beta = 1$, СиМ-2 (Фойгта) с $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1,5, \lambda = 0,1$, РеМ-3 (Кельвина) с $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0,5, \lambda = 0,1$ (с тем же временем ретардации $\tau = \lambda^{-1} = 10$), РеМ-4 с $\lambda = 0,1, \beta = 1, \gamma = 0,5, \alpha = 0,01$ (кривые 3, 5, 7, 9) и КП пяти нелинейных моделей с

$$\Phi(x) = A(0,5x^n + 0,5x^{1/n}) \tag{9}$$

при $A = 0,5, n = 3$ и теми же ФП (кривые 2, 4, 6, 8, 10). У КП 2, 4, 6, 10 есть участки выпуклости вниз, КП 2 (модели со степенной ФП) содержит все три типичные стадии ползучести, КП 6, 8 обладают горизонтальными асимптотами (как и 5, 7). Значения относительной деформации указаны в процентах. По оси абсцисс отложено безразмерное время; рассматриваемые качественные свойства кривых (монотонность, выпуклость, ограниченность и горизонтальные асимптоты КП, величины пределов и скачков деформации) не зависят от его конкретного масштабирования (инвариантны относительно сжатия оси времени).

Общее уравнение кривых ползучести для ступенчатых нагружений

Рассмотрим кусочно-постоянную программу нагружения с n ступеньками

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i [h(t-t_{i-1}) - h(t-t_i)] + \sigma_n h(t-t_{n-1}), \tag{10}$$

где $t_0 = 0, t_i > t_{i-1}, \sigma(t) = \sigma_i$ при $t \in (t_{i-1}, t_i)$ и $\sigma(t) = \sigma_n$ при $t > t_{n-1}$. Так как оператор (1), переводящий процесс $\sigma(t)$ в $\varphi(\varepsilon(t))$, линеен и инвариантен относительно сдвигов по времени, он переводит (10) в сумму откликов на каждую ступеньку:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t-t_{i-1}; t_i-t_{i-1}) + \sigma_n \Pi(t-t_{n-1})h(t-t_{n-1}), \tag{11}$$

где $S(t; T) := \Pi(t)h(t) - \Pi(t-T)h(t-T)$ – отклик на единичную ступеньку напряжения с носителем $[0, T]$ (задающий форму кривой обратной ползучести линейного ОС (2)). Тогда

$$\varepsilon(t) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t-t_{i-1}; t_i-t_{i-1}) + \sigma_n \Pi(t-t_{n-1})h(t-t_{n-1})\right), \quad t > 0, \quad (12)$$

где $\Phi = \varphi^{-1}$. Вычисление деформации по формуле (12) возможно лишь при тех t , при которых значение правой части выражения (11) принадлежит $D_\Phi = (\underline{x}; \bar{x})$. В противном случае отклик $\varepsilon(t)$ не определен, и это можно интерпретировать как разрушение, происходящее в момент $t = t^*$, когда (впервые) происходит выход за пределы интервала D_Φ . Если \underline{x} и \bar{x} бесконечны, то есть область значения МФ $\varphi(u)$ – вся ось (как в случае линейного ОС (2)), то для программ нагружения (10) с любыми t_i и σ_i формула (12) справедлива для всех $t > 0$. Именно этот случай мы и будем рассматривать, чтобы не усложнять формулировки дополнительными ограничениями на программы (10), необходимыми в случае конечности \underline{x} или \bar{x} .

Уравнение КП (11) можно представить в виде суммы влияний скачков напряжения $\hat{\sigma}_i := \sigma_{i+1} - \sigma_i$ ($\sigma_0 := 0$) в точках t_i : $\varphi(\varepsilon(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\sigma}_i \Pi(t-t_i)h(t-t_i)$, $t > 0$, или

$$\varepsilon(t) = \Phi\left(\sigma_1 \Pi(t) + \sum_{k=1}^i \hat{\sigma}_k \Pi(t-t_k)\right) \text{ при } t \in (t_i; t_{i+1}). \quad (13)$$

Зависимость между скачками и влияние ползучести на скачки упругой деформации (эффект «дрейфа»)

В точках разрыва $t = t_i$ программы нагружения (10) деформация (12) и ее производная, вообще говоря, имеют разрывы ($\varepsilon(t)$ – первого рода). Из (13) можно выразить пределы $\varepsilon(t)$ в точках $t = t_i$, слева и справа и скачок $\hat{\varepsilon}(t_i)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_i - 0) &= \Phi(p_i), \quad \varepsilon(t_i + 0) = \Phi(p_i + \hat{\sigma}_i \Pi(0)), \\ p_i &:= \sigma_1 \Pi(t_i) + \sum_{k=1}^{i-1} \hat{\sigma}_k \Pi(t_i - t_k), \\ \hat{\varepsilon}(t_i) &= \Phi(p_i + \hat{\sigma}_i \Pi(0)) - \Phi(p_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (14)$$

У нерегулярных моделей (тех, у которых $\Pi(0) = 0$, в частности, у СиМ- n и степенных моделей) $\hat{\varepsilon}(t_i) = 0$, то есть КП (12) непрерывны во всех t . $t = t_i$, как и в случае линейного ОС. Однако у регулярных нелинейных моделей скачки (14) ненулевые и зависят от всех параметров программы нагружения с номером, не превосходящим i ; скачок $\hat{\varepsilon}(t_i)$ возрастает с ростом скачка напряжения $\hat{\sigma}_i$ и совпадает с ним по знаку (так как МФ Φ возрастает).

В случае линейного ОС (2) с непрерывными $\dot{\Pi}(t)$ и $\dot{R}(t)$ скачки КП (12) и ее производной выражаются формулами $\hat{\varepsilon}(t_i) = \hat{\sigma}_i \Pi(0)$, $\dot{\hat{\varepsilon}}(t_i) = \hat{\sigma}_i \dot{\Pi}(0)$ [32], то есть скачок процесса-отклика в любой момент t_i линейно (и локально) зависит только от величины скачка

программы нагружения (и ее производных) в этот же момент времени и не зависит от t_i , от предыстории (от всех t_k и σ_k при $k < i$) и от ФП $\Pi(t)$ (зависит только от ее начальных значений $\Pi(0)$ и $\dot{\Pi}(0)$). В частности, модуль скачка $\varepsilon(t)$ не меняется при смене знака скачка нагрузки. Эти свойства можно использовать как индикаторы (не)применимости линейного ОС (2): например, в испытаниях сплавов алюминия зафиксировано [47], что модуль скачка деформации вниз в момент сброса нагрузки меньше, чем скачок вверх в момент догрузки, и потому поведение этих материалов не описывается ОС (2).

Для КП регулярных нелинейных моделей (1) все обстоит иначе: зависимость (14) скачков КП от всех параметров программы нагружения и ФП $\Pi(t)$ отличается от линейного случая не только нелинейностью, но и нелокальностью. Из формулы (14) следует, что $|\hat{\varepsilon}(t_i)|$ зависит от знака скачка нагрузки $\hat{\sigma}_i$ в момент $t = t_i$: $|\hat{\varepsilon}(t_i)|$ при разгрузке может быть больше или меньше, чем при догрузке, в зависимости от знака $\Phi''(x)$ на интервале $(p_i - \hat{\sigma}_i \Pi(0); p_i + \hat{\sigma}_i \Pi(0))$. Это делает возможным моделирование эффекта влияния ползучести (то есть предыстории нагружения и накопленной деформации) на скачки упругой деформации, порожденные «мгновенным» изменением напряжения в некоторый момент. Этот эффект зарегистрирован в испытаниях сплавов алюминия, композитов, костной ткани [7; 20; 21; 47]; в работе [21] он назван «дрейфом мгновенно-упругой деформации вследствие ползучести». В частности, этот эффект проявляется в том, что абсолютная величина скачка деформации в момент сброса нагрузки отличается от ее скачка при нагрузке (догрузке). Линейное ОС с произвольной функцией ползучести в принципе не способно моделировать явление дрейфа.

Асимптотика кривых ползучести, остаточная деформация и асимптотическая коммутативность

Исследуем асимптотику КП (12) при $t \rightarrow \infty$ (для моделей с $D_\Phi = (-\infty; \infty)$, когда КП (12) определена для всех $t > 0$). Так как для произвольной допустимой ФП $S(t; T) \rightarrow vT$ при $t \rightarrow \infty$, $v := \dot{\Pi}(\infty)$ [32], то $S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}) = v(t_i - t_{i-1}) + o(1)$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}) = vs + z(t), \text{ где } s := \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i (t_i - t_{i-1}), z(t) = o(1) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Поэтому КП (12) представима в виде:

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + vs + z(t)), \text{ где } z(t) = o(1) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (15)$$

а отклонение КП (12) от КП $\varepsilon_0(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}))$, соответствующей мгновенному нагружению до уровня σ_n в момент t_{n-1} (с нулевой предысторией), – в виде

$$\Delta(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + vs + z(t)) - \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})), t > t_{n-1}. \quad (16)$$

Перестановка ступеней нагружения с $i < n$ не влияет на величину s и асимптотики (15), (16). Для линейного ОС (2) $\Delta(t) = vs + z(t)$, а величина $\varepsilon_\infty = vs$ имеет смысл остаточной деформации после полной разгрузки (случай $\sigma_n = 0$) и восстановления при $t \rightarrow \infty$.

Параметр vs (наряду с σ_n) управляет асимптотикой конкретной КП (12), а параметр v – характером асимптотик *всех* КП (12) и отклонений (16) для произвольных ступенчатых программ нагружений (10). Если $v=0$ (и $\sigma_n \neq 0$), то по (15) и (16) $\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + z(t))$ и

$$\Delta(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + z(t)) - \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})), \text{ где } z(t) = o(1) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Из асимптотических представлений (15)–(17) вытекает формула для остаточной деформации при полной разгрузке в момент t_{n-1} (программа нагружения (10) с $\sigma_n = 0$) и ряд других важных следствий о поведении отклонения (16) при $t \rightarrow \infty$, отклонений КП с одинаковыми σ_n друг от друга, в частности, о влиянии перестановки ступеней нагружения [28].

Еще Одквистом [11] было подмечено (а затем проверялось в испытаниях), что в теории ползучести с упрочнением вида $\dot{\varepsilon} = g(\varepsilon)f(\sigma)$ (когда переменные ε и σ разделяются) справедливо свойство коммутативности при двухступенчатом нагружении [17, с. 217]: для двух программ нагружения, отличающихся порядком приложения напряжений σ_1 и σ_2 в течение одинакового времени T , деформация в момент $t = 2T$ будет одна и та же: $\varepsilon_{12}(2T) = \varepsilon_{21}(2T)$. В испытаниях материалов это свойство не выполняется, а наблюдается $\varepsilon_{12}(2T) > \varepsilon_{21}(2T)$ для $\sigma_2 > \sigma_1$ [6, с. 42; 17, с. 218]. В [32] доказано, что линейное ОС (2) с произвольной выпуклой вверх ФП воспроизводит этот эффект и всегда дает $\varepsilon_{12}(2T) > \varepsilon_{21}(2T)$ для любых T , $\sigma_1 > \sigma_2$, но при $t \rightarrow \infty$ для любого σ_3 , действующего при $t > 2T$, отклонение $\varepsilon_{12}(t, \sigma_3) - \varepsilon_{21}(t, \sigma_3)$ стремится к нулю (см. рис. 3). Последнее свойство мы будем называть асимптотической коммутативностью ОС (2) при перестановке ступеней нагружения (упоминания о нем отсутствуют в литературе).

Теорема 1. Пусть ФП $\Pi(t)$ положительна, дифференцируема, возрастает и (нестрого) выпукла вверх на $(0; \infty)$, а МФ $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (возможно $\omega_- = -\infty$ и $\omega_+ = +\infty$), $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ и область значений $\varphi(u)$ совпадает с $(-\infty; +\infty)$ (то есть $D_\varphi = (-\infty; +\infty)$). Тогда КП (12) нелинейного ОС (1) для любой ступенчатой программы нагружения (10) определена при всех $t > 0$ и обладает свойствами:

1) если $\Phi'(x)$ ограничена сверху на полуоси $[0; \infty)$ (то есть $\varphi'(u) > \gamma > 0$), то для любых двух программ вида (10) с одинаковыми конечными уровнями напряжения σ_n , моментами их включения $T = t_{n-1}$ (n произвольно) и значениями s разность откликов (КП (12)) $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$; в частности, при перестановке ступеней нагружения с номером $i < n$ выполняется свойство асимптотической коммутативности $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$;

2) если ФП ограничена, то $v=0$, все КП (12) обладают общей асимптотой $\varepsilon = \Phi(\sigma_n \Pi(\infty))$ при $t \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) \rightarrow 0$ для любых программ с одинаковыми σ_n ;

3) если $\sigma_n = 0$ (для финитных программ нагружений (10) с полной разгрузкой), то при $t \rightarrow \infty$ асимптотика КП (12) имеет вид $\varepsilon(t) = \Phi(vs + z(t))$, $z(t) \rightarrow 0$, КП (12) обладает

горизонтальной асимптотой $\varepsilon = \Phi(v\sigma)$, остаточная (пластическая) деформация $\varepsilon_\infty = \Phi(v\sigma)$ не зависит от значений ФП на конечном интервале времени и отлична от нуля тогда и только тогда, когда $v\sigma \neq 0$; если ФП обладает свойством $v = 0$, то $\varepsilon_\infty = 0$ для любых ступенчатых программ нагружения (10).

Пункты 2 и 3 теоремы следуют из представления (15), а доказательство п. 1 приведено в работе [28].

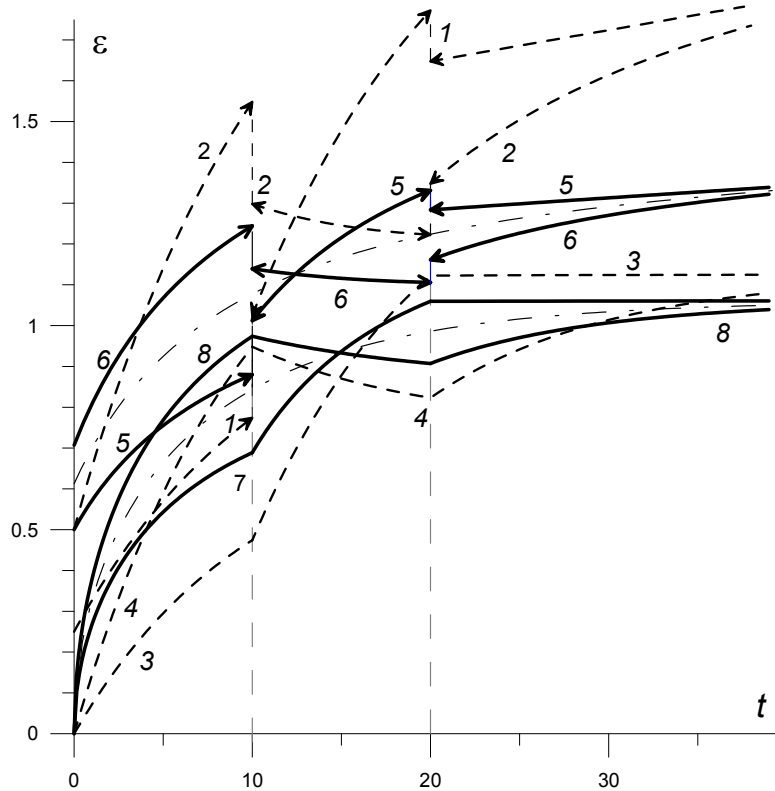


Рис. 3

На рисунке 3 приведены КП (12) для трехступенчатых программ (10) с $t_1 = 10$, $t_2 = 20$, $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = 1$ и $\sigma_3 = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$ (КП 1, 3, 5, 7) и с перестановкой ступеней σ_1 и σ_2 (КП 2, 4, 6, 8) для двух линейных (штриховые линии 1–4) и двух нелинейных моделей: КП 1, 2 – для линейной РеМ-4 ($\Pi = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}$) с $\alpha = 0,01$, $\beta = 2$, $\gamma = 1,5$, $\lambda = 0,1$; КП 3, 4 – для линейной модели Фойгта с $\beta = \gamma = 1,5$, $\lambda = 0,1$, $\alpha = 0$ (с таким же временем ретардации $\tau = 1/\lambda = 10$); КП 5, 6 и 7, 8 – для двух нелинейных моделей (1), получающихся из РеМ-4 и модели Фойгта введением МФ $\Phi = x^{0,5}$. Штрих-пунктирные линии – КП (8) этих двух нелинейных моделей при постоянном напряжении $\bar{\sigma} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$ (при $\sigma_2 > \sigma_1$ для них справедливо неравенство $\varepsilon(t; \sigma_1, \sigma_2) > \varepsilon(t; \bar{\sigma}) > \varepsilon(t; \sigma_2, \sigma_1)$ при всех $t > t_2$). Рисунок 3 иллюстрирует асимптотическую коммутативность КП при перестановке ступеней нагружения: для каждой из четырех моделей $\varepsilon(t; \sigma_1, \sigma_2) - \varepsilon(t; \sigma_2, \sigma_1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (п. 1 теоремы). ФП модели Фойгта (СиМ-2) ограничена и потому КП 3, 4, 7, 8 обладают горизонтальными асимптотами (п. 2 теоремы). В силу формулы (14) из $\Pi(0) = 0$ следует, что КП 3, 4, 7, 8 непрерывны и в точках $t = t_i$, а у КП 1, 2, 5, 6 есть скачки (помечены стрелками на рис. 3), причем в случае линейной модели скачки при догрузке и разгрузке одинаковы по модулю.

Условия затухания памяти

Если для *любой* программы нагружения (10) отклонение (16) КП (12) от КП $\varepsilon_0(t) = \Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}))$, соответствующей мгновенному нагружению от нуля до уровня σ_n в момент t_{n-1} стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, будем говорить, что ОС обладает свойством затухающей памяти (о начальной истории) [33; 34; 40].

В случае линейного ОС (2) условие $\nu = 0$ на ФП необходимо и достаточно для затухания памяти (для $\Phi(x) = x$ (17) дает $\Delta(t) = z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Если $\nu > 0$ (как, например, у параллельных соединений моделей Максвелла, то есть РеМ-2n), то след от прямоугольного импульса нагрузки не стирается никогда (остаточная деформация $\varepsilon_\infty = \bar{\sigma} \nu T$), а при несимметричном циклическом нагружении происходит неограниченное нарастание пластической деформации (ratcheting). Для нелинейного ОС (1) условие $\nu = 0$ не достаточно для затухания памяти: отклонение (17) не обязано стремиться к нулю, если $\Pi(\infty) \neq \infty$. Чтобы обеспечить $\Delta(t) \rightarrow 0$, надо наложить на Φ и Π дополнительные требования [28].

Теорема 2. Пусть выполнены предпосылки теоремы 1. Тогда для того, чтобы ОС (1) обладало свойством затухающей памяти при ползучести (то есть отклонение $\Delta(t)$ стремилось к нулю при $t \rightarrow \infty$ для всех КП (12) при *любых* ступенчатых нагружениях (10)), необходимо, чтобы $\dot{\Pi}(\infty) = 0$, и достаточно выполнения одного из двух следующих условий:

- 1) ФП ограничена на $[0; \infty)$ ($\Pi(\infty) < \infty$), а МФ $\Phi(x)$ – любая допустимая;
- 2) $\nu = 0$ и существует число $C > 0$ такое, что $\Phi'(x)$ ограничена сверху при $|x| > C$ (то есть существует $c > 0$: $\varphi'(u)$ ограничена снизу при $|u| > c$).

Пункт 1 теоремы 2 следует из представления (16) для отклонения $\Delta(t)$, так как из ограниченности ФП вытекает $\nu = 0$ и предельные равенства $\Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1})) \rightarrow \Phi(\sigma_n \Pi(\infty))$, $\Phi(\sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) + \nu s + z(t)) \rightarrow \Phi(\sigma_n \Pi(\infty))$ и $\Delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а доказательство п. 2 приведено в работе [28].

Замечание. Если $\nu \neq 0$ и $\sigma_n \neq 0$, то возможны два случая: $s = 0$ (специально подобранные программы нагружения) и $s \neq 0$ (основной). Если $s = 0$, отклонение (16) будет стремиться к нулю лишь при дополнительных ограничениях на МФ Φ (достаточно требовать ограниченность $\Phi'(x)$). Если же $s \neq 0$, то ограниченности $\Phi'(x)$ не достаточно, и для обеспечения $\Delta(t) \rightarrow 0$ нужны гораздо более сильные ограничения на МФ. В отличие от линейного ОС (2), когда $\Phi(x) = x$ и $\Delta = \varepsilon(t) - \sigma_n \Pi(t - t_{n-1}) = \nu s + o(1)$, то есть $\Delta(t) \rightarrow \nu s \neq 0$ и память не затухает при $\nu \neq 0$, для нелинейного ОС (1) возможны разные варианты поведения $\Delta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ в зависимости от свойств Φ . Если существуют пределы $\Phi'(+\infty)$ и $\Phi'(-\infty)$ производной $\Phi'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и оба равны нулю (то есть $\varphi'(\omega_- + 0) = \varphi'(\omega_+ - 0) = +\infty$), а ФП не ограничена, то $\Delta(t) \rightarrow 0$ для любой программы нагружения (10) с $\sigma_n \neq 0$. Это выполнено, например, для МФ $\varphi(u)$ вида (6).

Модель может обладать затухающей памятью, хотя ни одно из достаточных условий теоремы 2 не выполнено. Примером может служить модель (1) с МФ

$$\Pi(t) = at^u, \quad a > 0, \quad u \in (0; 1); \quad \Phi(x) = A[\vartheta x^m + (1 - \vartheta)x^{1/m}], \quad m > 1, \quad A > 0, \quad \vartheta \in (0; 1]. \quad (18)$$

При любых значениях параметров a, u, m, ϑ, A в (18) необходимое условие $v = 0$ выполнено, а оба достаточных условия затухания памяти из теоремы 2 не выполняются: 1) $\Pi(\infty) = \infty$ при $u < 1$; 2) производная $\Phi' = A[m\vartheta x^{m-1} + m^{-1}(1-\vartheta)x^{(1-m)/m}]$ не ограничена при $m > 1$. В [28] доказано, что критерий затухания памяти для моделей (18) имеет вид $1 < m < 1/u$. Если же $m > 1/u$, то $\Delta(t) \rightarrow \infty$.

Накопление пластической деформации при циклическом нагружении

Для линейного ОС (2) условие $v = 0$ на ФП необходимо и достаточно для затухания памяти при ступенчатых нагружениях (п. 2 теоремы 2 выполняется). Если $v > 0$ (как, например, у модели Максвелла и всех РеМ-2n), то при несимметричном циклическом ступенчатом нагружении (с чередующимися напряжениями σ_1, σ_2 , приложенными в течение времени τ , и произвольным временем отдыха между циклами нагружения) происходит неограниченное нарастание пластической деформации (рэтчетинг) со скоростью $v\tau(\sigma_1 + \sigma_2)$ за цикл. Если же $v = 0$, то полная деформация ограничена и стабилизируется, в этом случае ОС (2) моделирует приспособляемость материала (shakedown).

При периодическом ступенчатом нагружении с двумя ступенями равной длительности 0.5τ в цикле ($t_{i+1} - t_i = t_1 = 0.5\tau$, $\sigma_{2i+1} = \sigma_1$, $\sigma_{2i} = \sigma_2$, $i = 1, \dots$) на интервалах $t \in (t_{i-1}; t_i)$ для кривой ползучести, порождаемой ОС (1), справедливы формулы (12), (15). Пластическая деформация за N циклов:

$$p_N = \Phi(vs_N), \quad s_N = s = 0.5\tau(\sigma_1 + \sigma_2)N \quad (19)$$

(так как $s = \sum_{i=1}^{2n} \sigma_i(t_i - t_{i-1})$, $N = 2n$). Если $v = 0$, то $p_N = 0$, то есть любое циклическое нагружение не вызывает накопления пластических деформаций (ибо $\Phi(0) = 0$).

Если $v \neq 0$, несимметричное циклическое нагружение (с $\sigma_2 \neq -\sigma_1$) всегда вызывает монотонное нарастание модуля пластической деформации, а в случае $\sigma_2 = -\sigma_1$ будет $p_N = 0$ (так как $s_N = 0$), а КП – периодическая функция. В отличие от линейного ОС, скорость нарастания пластической деформации не постоянна. Приращение пластической деформации за j -й цикл выражается формулой

$$p_j - p_{j-1} = \Phi(vs_j) - \Phi(vs_{j-1}). \quad (20)$$

Если МФ ограничена, то моделируется приспособляемость, если нет – рэтчетинг, то есть неограниченное нарастание пластической деформации.

Из (19) следует, что для любых МФ прирост пластической деформации за фиксированное время Δt не зависит от частоты (периода τ) цикла нагружения с заданными амплитудами σ_1, σ_2 : если $N_1\tau_1 = N_2\tau_2 = \Delta t$, то

$$p(\Delta t) = \Phi(vs(\Delta t)), \quad s(\Delta t) = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)\Delta t$$

(рассматривается изотермический режим, то есть не учитывается разогрев материала при нагружениях с достаточно высокой частотой). Все сказанное справедливо и в случае, когда

диссипативные свойства материала и скорости ползучести при растяжении и сжатии не одинаковы ($\Phi(x)$ не нечетна).

Кривые ползучести при двухступенчатом нагружении, обратная ползучесть

Для иллюстрации различия свойств КП (12), порождаемых линейным и нелинейным ОС, рассмотрим случай $n = 2$. Тогда при $t > t_1$ имеем:

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_1 \Pi(t) + (\sigma_2 - \sigma_1) \Pi(t - t_1)), \text{ или}$$

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1) + \sigma_1 S(t; t_1)), \text{ или } \varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2) S(t; t_1)), \quad (21)$$

где $S(t; t_1) = \Pi(t) - \Pi(t - t_1)$, $t > t_1$, – положительная убывающая функция аргумента t , $S(t; t_1) \rightarrow vt_1 \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для КП (21) с $\sigma_1 > 0$ всегда $\varepsilon(t) > \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$, так как $S(t; t_1) > 0$, а $\Phi(x)$ возрастает (в отличие от случая линейного ОС, отклонение $\Delta(t) := \varepsilon(t) - \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$ уже не обязательно убывает). Аналогично из второго представления (21) следует, что $\varepsilon(t) > \Phi(\sigma_2 \Pi(t))$ при $\sigma_2 < \sigma_1$ и

$$\Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1)) < \varepsilon(t) < \Phi(\sigma_2 \Pi(t)) \text{ при } \sigma_2 > \sigma_1, t > t_1, \quad (22)$$

то есть при $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ верна двусторонняя оценка для КП (21), не зависящая от σ_1 .

Из (15) при $n = 2$ следует, что при $t \rightarrow \infty$ КП (21) имеет асимптотику

$$\varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1) + \sigma_1 vt_1 + o(1)), \text{ или } \varepsilon(t) = \Phi(\sigma_2 \Pi(t) + (\sigma_1 - \sigma_2) vt_1 + o(1)).$$

Если ФП ограничена, то $v = 0$ и $\varepsilon(\infty) = \Phi(\sigma_2 \Pi(\infty))$, то есть КП (21) стремится к горизонтальной асимптоте. Если обе МФ не ограничены (и $\sigma_2 \neq 0$), то $\varepsilon(t) \rightarrow \infty$.

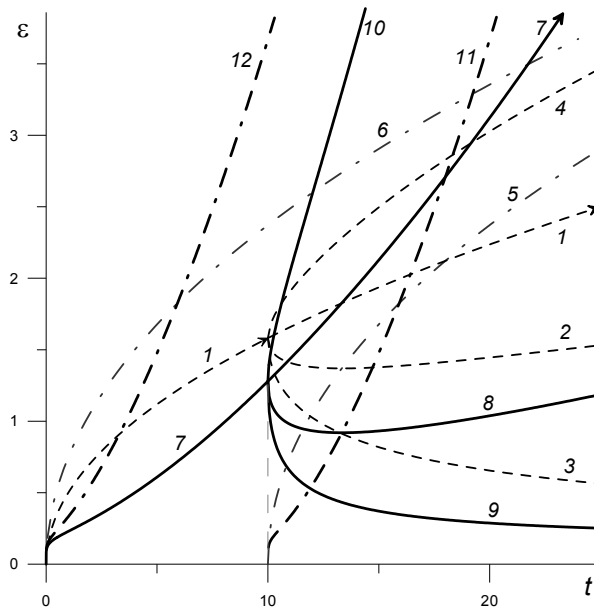


Рис. 4

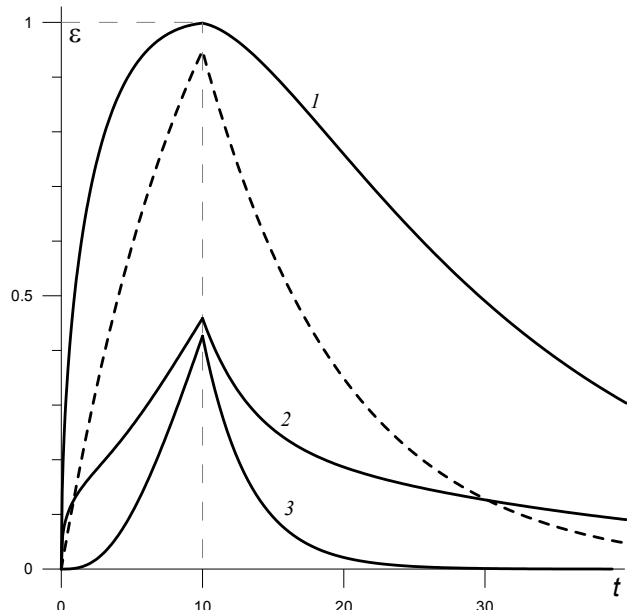


Рис. 5

На рисунке 4 приведены КП (21) фрактальной линейной модели с ФП $\Pi = At^u$, $A = 0,5$, $u = 0,5$ для программ нагружения с $t_1 = 10$, $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 1; 0,5; 0; 1,5$ (штриховые кривые 1–4) и КП нелинейной модели с МФ $\Phi(x) = 0,25(x^3 + x^{1/3})$ (вида (18) с $m = 3$, $\vartheta = 0,5$, $A = 0,5$) и той же ФП для тех же программ нагружения (кривые 7–10). Так как $\Pi(0) = 0$, то в т. $t = t_1$ все КП 1–4 и 7–10 не имеют разрыва; из $\dot{\Pi}(0) = +\infty$ следует, что у всех КП $\dot{\Pi}(t_1 + 0) = \pm\infty$ (знак совпадает с $\text{sgn}(\sigma_2 - \sigma_1)$). Штрих-пунктирные линии 11, 12 – обычная КП $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \Pi(t))$ и ее сдвиг $\varepsilon = \Phi(\sigma_2 \Pi(t - t_1))$ с $\sigma_2 = 1,5$, участвующие в оценке (22) для КП (21) с $\sigma_2 = 1,5$; линии 5, 6 – аналогичные оценки для КП линейной модели. Для любого $u < 1$, очевидно, $v = 0$, и потому $\sigma_2(\Pi(t) - \Pi(t - t_1)) \rightarrow 0$ и $\varepsilon(t) - \sigma_2 \Pi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (см. теорему 2). Таким образом, ширина полосы между кривыми 5, 6 стремится к нулю, и эта линейная модель (класса НеМ) обладает свойством затухания памяти. Однако нелинейная модель им не обладает, так как введение МФ $\Phi(x)$ вида (18) меняет ситуацию: при заданных значениях $u = 0,5$, $m = 3$ не выполняется критерий затухания памяти $1 < m < 1/u$ для моделей семейства (18). Их КП (21) не сходятся к обычной КП и отклонение $\Delta(t)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, а полоса между кривыми 5, 6 не стягивается к нулю, а неограниченно расширяется. Отметим, что при любом $\sigma_2 \in (0; \sigma_1)$ у КП есть точка минимума $t_m > t_1$ (см. кривые 2, 8), она двигается вправо от t_1 до ∞ с убыванием σ_2 от σ_1 до нуля (см. кривые обратной ползучести 3, 9), так как функция $t_m(\sigma_2)$ убывает, $t_m(0+) = \infty$, $t_m(\sigma_1 - 0) = t_1$ [28]. Наличие точек экстремума деформации между точками разрыва программы нагружения наблюдается в испытаниях разных материалов [3; 6; 47; 50; 57], но, как правило, считается признаком нелинейности их поведения.

При $\sigma_2 = 0$ формула (21) дает уравнение кривой обратной ползучести (КОП):

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t)) \text{ при } t \leq t_1; \quad \varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} S(t; t_1)) \text{ при } t > t_1, \quad (23)$$

где $S(t; t_1) = \Pi(t) - \Pi(t - t_1)$, $\bar{\sigma} := \sigma_1 > 0$. Уравнение (23) справедливо при условии $\bar{\sigma} \Pi(t) \in D_\Phi$ для $t \leq t_1$, то есть $\bar{\sigma} \Pi(t_1) < \bar{x}$. Тогда КОП (23) определена на всем луче $t \geq 0$, так как $S(t; t_1)$ убывает по t в силу выпуклости вверх ФП [57].

Семейство КОП (23) возрастает по $\bar{\sigma}$ при любом $t > 0$. Для любого (допустимого) $\bar{\sigma} > 0$ КОП (23) возрастает по t на всем промежутке $t \leq t_1$, и убывает (нестрого) на луче $t > t_1$ (у вязкого элемента и модели Максвелла $\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma} \alpha t_1) = \text{const} > 0$ при $t > t_1$, а у упругого элемента $\varepsilon(t) \equiv 0$). Так как при $t \rightarrow \infty$ $\Pi(t) - \Pi(t - t_1) \rightarrow v t_1$, где $v := \dot{\Pi}(\infty) \geq 0$ [57], то КОП (23) стремится к пределу $\varepsilon_\infty = \Phi(\bar{\sigma} v t_1)$; ε_∞ имеет смысл остаточной деформации (при бесконечно долгой выдержке). Как и для линейного ОС (2), $\varepsilon_\infty = 0$ только тогда, когда $v = 0$ (в силу возрастания МФ $\Phi(x)$ и требования $\Phi(0) = 0$); лишь в этом случае моделируется «полное восстановление». При $v \neq 0$ знаки ε_∞ и $\bar{\sigma}$ совпадают.

Ограничение $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$, выведенное для линейного ОС (2) [57], и возрастание МФ φ обеспечивают монотонное убывание КОП (23) при $t > t_1$, никакие дополнительные ограничения на φ для этого не требуются. Возрастание $\ddot{\Pi}(t)$ гарантирует выпуклость вниз на луче $t > t_1$ КОП линейного ОС $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} S(t; t_1)$, $\bar{\sigma} > 0$, но для выпуклости вниз КОП (23) этого уже не достаточно.

Качественные отличия КОП ОС (1) от КОП линейного ОС (2), обусловленные введением второй МФ: 1) КОП (23) с $\bar{\sigma} > 0$ уже не обязана быть выпуклой вверх на интервале $(0; t_1)$ и выпуклой вниз на луче $t \geq t_1$ и может иметь точки перегиба; 2) у линейного ОС скачки в т. $t = t_1$ деформации и скорости $\hat{\varepsilon}(t_1) = -\bar{\sigma} \Pi(0) = -\hat{\varepsilon}(0)$ и $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) = -\bar{\sigma} \dot{\Pi}(0) = -\hat{\dot{\varepsilon}}(0)$ не зависят от t_1 , а у нелинейных регулярных моделей скачки

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(t_1) &= \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t_1) - \bar{\sigma} \Pi(0)) - \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t_1)) \leq 0, \\ \hat{\dot{\varepsilon}}(t_1) &= \bar{\sigma} [\dot{\Pi}(t_1) - \dot{\Pi}(0)] \Phi'(\bar{\sigma} [\Pi(t_1) - \Pi(0)]) - \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t_1) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t_1)) \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

зависят от t_1 и не равны по модулю скачкам $\hat{\varepsilon}(0)$ и $\hat{\dot{\varepsilon}}(0)$ в момент нагружения $t = 0$ (наличие этих свойств у экспериментальной КОП – индикаторы неприменимости линейного ОС).

На рисунке 5 приведены КОП (23) (с $\bar{\sigma} = 1$, $t_1 = 10$) для моделей с $\Pi(t) = \beta - \beta e^{-\lambda t}$ (ФП модели Фойгта) с $\beta = 1, 5$, $\lambda = 0, 1$ и четырех разных МФ: штриховая кривая – для $\Phi(x) = x$ (КОП линейной модели Фойгта), кривая 1 – для $\Phi(x) = [1 - (x-1)^2]^{0,5}$, $x \in [0; 1]$; 2 – $\Phi(x) = 0, 25(x^3 + x^{1/3})$ ($\Phi(x)$ вида (18) с $m = 3$, $\vartheta = 0, 5$, $A = 0, 5$); 3 – для $\Phi(x) = 0, 5x^3$. Разрыва в т. $t = t_1$ нет, так как $\Pi(0) = 0$ (см. (24)). Формы КОП 1–3 качественно отличаются от типичной КОП, порождаемой линейным ОС.

Заключение

Аналитически изучены и сопоставлены общие свойства и качественные особенности кривых ползучести (12), порождаемых линейным ОС вязкоупругости (2) и обобщающим его нелинейным определяющим соотношением Работнова (1) при произвольных ступенчатых нагружениях (10), исследованы их зависимость от характеристик двух материальных функций (МФ) и параметров программы нагружения. Получены формулы для скачков деформации в точках разрыва напряжения, для остаточной деформации при полной разгрузке и для отклонения от обычной кривой ползучести (с нулевой предысторией); исследованы асимптотика кривых ползучести (12) в бесконечности, влияние перестановки ступеней нагружения, скорость рэтчетинга при циклическом нагружении, условия монотонности кривой обратной ползучести. Доказано, что ОС (1) с любыми (допустимыми) материальными функциями обладает свойством асимптотической коммутативности при перестановке ступеней нагружения, а остаточная деформация не меняется (теорема 1). Установлены достаточные условия затухания памяти ОС при ступенчатых нагружениях (теорема 2).

В результате сравнения обнаруженных свойств теоретических кривых ползучести (12), порождаемых линейным ОС вязкоупругости (2) и нелинейным ОС Работнова (1), друг с другом и с типичными свойствами экспериментальных кривых ползучести вязкоупругопластичных

материалов сопоставлены арсеналы возможностей ОС (1) и (2) по описанию различных эффектов при ползучести, выявлены дополнительные возможности ОС (1) и свойства, унаследованные им от линейного соотношения вязкоупругости. Установлено, что зависимость (14) скачков КП от параметров программы нагружения и ФП $\Pi(t)$ отличается от линейного случая не только нелинейностью, но и нелокальностью, в частности, модуль скачка деформации (14) зависит не только от модуля скачка напряжения (как у линейного ОС), но и от его знака, от истории нагружения и накопленной деформации ползучести. Поэтому нелинейное ОС (1) способно (в отличие от линейного ОС) описывать явление дрейфа мгновенно-упругой деформации вследствие ползучести.

МФ $\varphi(u)$ в ОС (1) также меняет асимптотику (15) кривых ползучести в бесконечности и скорость рэтчетинга при циклических нагружениях (20), оно порождает более сложные условия затухания памяти (теорема 2) и ограниченности деформации при циклических нагружениях, чем у линейного ОС. Показано, что равенство нулю величины предела $v = \dot{\Pi}(\infty)$ производной функции ползучести в бесконечности – критерий полного восстановления после снятия нагрузки, необходимое условие затухания памяти (но не достаточное, в отличие от линейной вязкоупругости) и критерий отсутствия накопления пластической деформации при циклических нагружениях. Если $v \neq 0$, несимметричное циклическое нагружение всегда вызывает монотонное нарастание модуля пластической деформации. В отличие от линейного ОС, скорость нарастания пластической деформации за цикл (20) не постоянна. Если МФ ограничена, то моделируется приспособляемость, если нет – рэтчетинг.

ПРИМЕЧАНИЕ

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеева, С. И. Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями / С. И. Алексеева, М. А. Фроня, И. В. Викторова // Композиты и наноструктуры. – 2011. – № 2. – С. 28–39.
2. Алексеева, С. И. Модель нелинейной наследственной среды с учетом температуры и влажности / С. И. Алексеева // ДАН. – 2001. – Т. 376, № 4. – С. 471–473.
3. Бугаков, И. И. Ползучесть полимерных материалов / И. И. Бугаков. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
4. Дергунов, Н. Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории / Н. Н. Дергунов, Л. Х. Паперник, Ю. Н. Работнов // ПМТФ. – 1971. – № 2. – С. 76–82.
5. Локощенко, А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов / А. М. Локощенко. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
6. Малинин, Н. Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1981. – 221 с.
7. Мелнис, А. Э. Нелинейная ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении / А. Э. Мелнис, Я. Б. Лайзан // Механика полимеров. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 97–100.
8. Мельшанов, А. Ф. Экспериментальная проверка определяющего уравнения для металлов при нагружении и разгрузке / А. Ф. Мельшанов, Ю. В. Суворова, С. Ю. Хазанов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – № 6. – С. 166–170.
9. Москвитин, В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
10. Наместников, В. С. О наследственных теориях ползучести / В. С. Наместников, Ю. Н. Работнов // ПМТФ. – 1961. – Т. 2, № 4. – С. 148–150.

11. Одквист, Ф. Технические теории ползучести / Ф. Одквист // Сб. переводов «Механика». – 1959. – № 2. – С. 101–111.
12. Осокин, А. Е. Нелинейное определяющее уравнение наследственной среды и методика определения его параметров / А. Е. Осокин, Ю. В. Суворова // ПММ. – 1978. – Т. 42, № 6. – С. 1107–1114.
13. Работнов, Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести / Ю. Н. Работнов // Вестник МГУ. – 1948. – № 10. – С. 81–91.
14. Работнов, Ю. Н. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 / Ю. Н. Работнов, Л. Х. Паперник, Е. И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391–397.
15. Работнов, Ю. Н. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении / Ю. Н. Работнов, Ю. В. Суворова // Изв. АН СССР. МТТ. – 1972. – № 4. – С. 41–54.
16. Работнов, Ю. Н. О связи характеристик ползучести стекло-пластиков с кривой мгновенного деформирования / Ю. Н. Работнов, Л. Х. Паперник, Е. И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 4. – С. 624–628.
17. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1966. – 752 с.
18. Работнов, Ю. Н. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах / Ю. Н. Работнов, Л. Х. Паперник, Е. И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 1. – С. 74–87.
19. Работнов, Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
20. Радченко, В. П. Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита / В. П. Радченко, Ю. П. Самарин // Механика композитных материалов. – 1983. – Т. 19, № 2. – С. 231–237.
21. Радченко, В. П. О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести / В. П. Радченко, Д. В. Шапиевский // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2006. – Вып. 43. – С. 99–105.
22. Радченко, В. П. Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов / В. П. Радченко, П. Е. Кичаев. – Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2011. – 157 с.
23. Суворова, Ю. В. Инженерные приложения модели наследственного типа к описанию поведения полимеров и композитов с полимерной матрицей / Ю. В. Суворова, С. И. Алексеева // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2000. – Т. 66, № 5. – С. 47–51.
24. Суворова, Ю. В. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния / Ю. В. Суворова, С. И. Алексеева // Механика композитных материалов. – 1993. – № 5. – С. 602–607.
25. Суворова, Ю. В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред / Ю. В. Суворова // Механика полимеров. – 1977. – № 6. – С. 976–980.
26. Суворова, Ю. В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях матрицей / Ю. В. Суворова // Изв. АН СССР. МТТ. – 2004. – № 1. – С. 174–181.
27. Фанг, Я. Ч. Математические модели зависимости напряжение – деформация для живых мягких тканей / Я. Ч. Фанг // Механика полимеров. – 1975. – № 5. – С. 850–867.
28. Хохлов, А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А. В. Хохлов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. – 2017. – № 3. – С. 93–123. – DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123.
29. Хохлов, А. В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности / А. В. Хохлов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 326–361. – DOI: 10.14498/vsgtu1533.
30. Хохлов, А. В. Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности / А. В. Хохлов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2018. – № 1. – DOI: 10.14498/vsgtu1543.
31. Хохлов, А. В. Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гауп-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова / А. В. Хохлов // Механика композитных материалов. – 2018 (в печати).

32. Хохлов, А. В. Асимптотическая коммутативность кривых ползучести при ступенчатом нагружении в линейной теории наследственности / А. В. Хохлов // *Машиностроение и инженерное образование*. – 2016. – № 1. – С. 70–82.
33. Хохлов, А. В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гап-деформировании и методики ее идентификации / А. В. Хохлов // *Изв. РАН. МГТ*. – 2018. – № 3. – С. 81–104. – DOI: 10.7868/S0572329918030108.
34. Хохлов, А. В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости / А. В. Хохлов // *Наука и образование. Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.* – 2016. – № 5. – С. 187–245. – DOI: 10.7463/0516.0840650.
35. Хохлов, А. В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях / А. В. Хохлов // *Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. – 2016. – Т. 20, № 3. – С. 524–543. – DOI: 10.14498/vsgtu1512.
36. Хохлов, А. В. Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А. В. Хохлов // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2016. – Вып. 78, № 4. – С. 452–466.
37. Хохлов, А. В. Критерий разрушения и кривые длительной прочности, порождаемые определяющим соотношением нелинейной теории наследственности Работнова / А. В. Хохлов // *Вестн. машиностроения*. – 2017. – № 6. – С. 39–46.
38. Хохлов, А. В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации / А. В. Хохлов // *Машиностроение и инженерное образование*. – 2016. – № 3. – С. 55–68.
39. Хохлов, А. В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации / А. В. Хохлов // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2015. – Вып. 77, № 1. – С. 60–74.
40. Хохлов, А. В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти / А. В. Хохлов // *Изв. РАН. МГТ*. – 2007. – № 2. – С. 147–166.
41. Хохлов, А. В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов / А. В. Хохлов // *Изв. РАН. МГТ*. – 2018 (в печати).
42. Abramowitch, S. D. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory / S. D. Abramowitch, S. L.-Y. Woo // *J. Biomech. Eng.* – 2004. – Vol. 126. – P. 92–97.
43. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials / B. Babaei, S. D. Abramowitch [et al.] // *J. Royal. Soc. Interface*. – 2015. – Vol. 12, 20150707. – DOI: 10.1098/rsif.2015.0707.
44. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling / A. Nekouzadeh, K. M. Pryse, E. L. Elson, G. M. Genin // *J. of Biomechanics*. – 2007. – Vol. 40, № 14. – P. 3070–3078. – DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019.
45. Bergstrom, J. S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling* / J. S. Bergstrom. – Elsevier : William Andrew, 2015. – 520 p.
46. Betten, J. *Creep Mechanics* / J. Betten. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
47. Dandrea, J. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys / J. Dandrea, R. S. Lakes // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. – 2009. – Vol. 13, № 4. – P. 303–315. – DOI: 10.1007/s11043-009-9089-6.
48. De Frate, L. E. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model / L. E. De Frate, G. Li // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. – 2007. – Vol. 6, № 4. – P. 245–251.
49. De Pascalis, R. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model / R. De Pascalis, I. D. Abrahams, W. J. Parnell // *Proc. R. Soc. A*. – 2014. – Vol. 470, 20140058. – DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.

50. Drozdov, A. D. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers / A. D. Drozdov, N. Dusunceli // *Mechanics of Materials*. – 2014. – Vol. 69, № 1. – P. 116–131.
51. Duenwald, S. E. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment / S. E. Duenwald, R. Vanderby, R. S. Lakes // *Acta Mechanica*. – 2009. – Vol. 205. – P. 23–33.
52. Duenwald, S. E. Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling / S. E. Duenwald, R. Vanderby, R. S. Lakes // *Biorheology*. – 2010. – Vol. 47. – P. 1–14.
53. Fatemi, A. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials / A. Fatemi, L. Yang // *Int. J. Fatigue*. – 1998. – Vol. 20, № 1. – P. 9–34. – DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00081-9.
54. Findley, W. N. Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials / W. N. Findley, J. S. Lai, K. Onaran. – Amsterdam : North Holland, 1976. – 368 p.
55. Fung, Y. C. Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues / Y. C. Fung. – N.-Y. : Springer-Verlag, 1993. – 568 p.
56. Fung, Y. C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* / Y. C. Fung ; ed. by Y. C. Fung [et al.]. – New Jersey : Prentice-Hall, 1972. – P. 181–208.
57. Khan, F. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers / F. Khan, C. Yeakle // *Int. J. Plasticity*. – 2011. – Vol. 27, № 4. – P. 512–521.
58. Lakes, R. S. Viscoelastic Materials / R. S. Lakes. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2009. – 461 p.
59. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments / J. R. Funk, G. W. Hall, J. R. Crandall, W. D. Pilkey // *J. Biomech. Eng.* – 2000. – Vol. 122. – P. 15–22.
60. Sarver, J. J. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments / J. J. Sarver, P. S. Robinson, D. M. Elliott // *J. Biomech. Eng.* – 2003. – Vol. 125, № 5. – P. 754–758. – DOI: 10.1115/1.1615247.
61. Sauren, A. A. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung / A. A. Sauren, E. P. Rousseau // *J. Biomech. Eng.* – 1983. – Vol. 105. – P. 92–95.
62. Tschoegl, N. W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior / N. W. Tschoegl. – Berlin : Springer, 1989. – 769 p.
63. Woo, S. L.-Y. Mechanical properties of tendons and ligaments – I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties / S. L.-Y. Woo // *Biorheology*. – 1982. – Vol. 19. – P. 385–396.

REFERENCES

1. Alekseeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analiz vyzkoupругikh svoystv polimernykh kompozitov s ugerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of Viscoelastic Properties of Polymer-Carbon Composites]. *Kompozity i nanostruktury* [Composites and Nanostructures], 2011, no. 2, pp. 28-39.
2. Alekseeva S.I. Model nelineynoy nasledstvennoy srede s uchetom temperatury i vlazhnosti [The Model of Nonlinear Hereditary Medium Taking into Account Temperature and Humidity]. *Doklady akademii nauk*, 2001, vol. 376, no. 4, pp. 471-473.
3. Bugakov I.I. *Polzuchest polimernykh materialov* [Creep of Polymer Materials]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 287 p.
4. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analiz povedeniya grafita na osnove nelineynoy nasledstvennoy teorii [Analysis of Graphite Behavior on the Basis of Nonlinear Heredity Theory]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, vol. 12, no. 2, pp. 235-240. DOI: 10.1007/BF00850695.
5. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitel'naya prochnost metallov* [Creep and Long-Lasting Strength of Metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 504 p.
6. Malinin N.N. *Raschet'y na polzuchest elementov mashinostroitelnykh konstruksiy* [Calculations of Engineering Elements Creep]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 221 p.
7. Melnis A.E., Layzan Ya.B. Nelineynaya polzuchest kompaktnoy kostnoy tkani cheloveka pri rastyazhenii [Nonlinear Creep of Human Compact Bone Tissue upon Stretching]. *Polymer Mechanics*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 82-84. DOI: 10.1007/BF00859565.

8. Melshanov A.F., Suvorova Yu.V., Khazanov S.Yu. Eksperimentalnaya proverka opredelyayushchego sootnosheniya dlya metallov pri nagruzhении i razgruzke [Test Verification of a Constitutive Correlation for Metals under Loading and Unloading]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 1974, no. 6, pp. 166-170.
9. Moskvitin V.V. *Tsiklichesкое nagruzhenie elementov konstruksii* [Cyclic Loading of Structure Elements]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 344 p.
10. Namestnikov V.S., Rabotnov Yu.N. O nasledstvennykh teoriyakh polzuchesti [On Hereditary Creep Theories]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics], 1961, vol. 2, no. 4, pp. 148-150.
11. Odqvist F. Tekhnicheskie teorii polzuchesti [Technical Theories of Creep]. *Mekhanika*, 1959, no. 2, pp. 101-111.
12. Osokin A.E., Suvorova Yu.V. Nelineynoe opredelyayushchee uravnenie nasledstvennoy sredy i metoda opredeleniya ego parametrov [Nonlinear Governing Equation of a Hereditary Medium and the Methodology for Determining Its Parameters]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1978, vol. 42, no. 6, pp. 1214-1222. DOI: 10.1016/0021-8928(78)90072-2.
13. Rabotnov Yu.N. Nekotorye voprosy teorii polzuchesti [Some Issues of Creep Theory]. *Vestnik MGU*, 1948, no. 10, pp. 81-91.
14. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Nelineynaya polzuchest stekloplastika TS8/3-250 [Nonlinear Creep of Fibre-Glass Reinforced Plastic TS 8/3-250]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1971, no. 3, pp. 391-397.
15. Rabotnov Yu.N., Suvorova Yu.V. O zakone deformirovaniya metallov pri odnoosnom nagruzhении [On the Law of Metals Deformation under Uni-Axial Loading]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 1972, no. 4, pp. 41-54.
16. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. O svyazi kharakteristik polzuchesti stekloplastikov s krivoi mgnovennogo deformirovaniya [On Connection between Fiberglass Creep Behavior and Momentary Deforming Curve]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1971, no. 4, pp. 624-628.
17. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruksiy* [Creep Problems in Structural Members]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 752 p.
18. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelineynoy teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennykh effektov v polymernykh materialakh [Description of Time Dependent Effects in High Polymers Using the Nonlinear Theory of Heredity]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1971, no. 1, pp. 74-87.
19. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Fundamentals of Hereditary Mechanics of Solids]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 384 p.
20. Radchenko V.P., Samarin Yu.P. Vliyanie polzuchesti na velichinu uprugoy deformatsii sloistogo kompozita [Effect of Creep on the Elastic Deformation of a Laminar Composite]. *Mechanics of Composite Materials*, 1983, vol. 19, no. 2, pp. 162-168. DOI: 10.1007/BF00604218.
21. Radchenko V.P., Shapievskiy D.V. O dreyfe uprugoy deformatsii dlya nelineyno-uprugikh materialov vsledstvie polzuchesti [On the Drift of Elastic Deformation due to Creep for Nonlinear Elastic Materials]. *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta, Ser.: Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, no. 43, pp. 99-105. DOI: 10.14498/vsgtu458.
22. Radchenko V.P., Kichaev P.E. *Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov* [Power Conception of Metals' Creep and Vibrocreep]. Samara, SamSTU Publ., 2011. 157 p.
23. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Inzhenernye prilozheniya modeli nasledstvennogo tipa k opisaniyu povedeniya polimerov i kompozitov s polimernoy matritse [Engineering Applications of Heredity Model to Description of the Polymer and Polymer Matrix Composite Behavior]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2000, vol. 66, no. 5, pp. 47-51.
24. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nelineynaya model izotropnoi nasledstvennoy sredy dlya sluchaya slozhnogo napryazhonnogo sostoyaniya [A Nonlinear Model for Isotropic Hereditary Media under Complex Stress]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials], 1993, no. 5, pp. 602-607.

25. Suvorova Yu.V. Nelineynye efekty pri deformirovani n nasledstvennykh sred [Nonlinear Effects in Case of Hereditary Medium Deformation]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1977, no. 6, pp. 976-980.
26. Suvorova Yu.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Yu.N. Rabotnova i ego prilozheniyakh [On the Rabotnov's Nonlinear Hereditary Equation and Its Applications]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2004, no. 1, pp. 174-181 (in Russian).
27. Fung Y.C. Matematicheskie modeli zavisimosti napryazhenie – deformatsiya dlya zhivykh myagkikh tkaney [Mathematical Models of Strain-Deformation Dependence for Soft Living Tissues]. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics], 1975, no. 5, pp. 850-867.
28. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Analysis of General Properties of Creep Curves Generated by the Rabotnov's Nonlinear Hereditary Relation under Multi-Step Loadings]. *Vestn. Mosk. gos. tekhn. un-ta im. N.E. Baumana. Ser. Estestv. nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences], 2017, no. 3, pp. 93-123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123.
29. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh lineynoy teoriy nasledstvennosti [Analysis of Creep Curves Produced by the Linear Viscoelasticity Theory under Cyclic Stepwise Loadings]. *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326-361. DOI: 10.14498/vsgtu1533.
30. Khokhlov A.V. Analiz svoystv krivykh polzuchesti s proizvolnoy nachalnoy stadiy nagruzheniya, porozhdayemykh lineynoy teoriy nasledstvennosti [Analysis of Creep Curves Properties Generated by the Linear Viscoelasticity Theory under Arbitrary Loading Programs at Initial Stage]. *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser.: Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, no. 1. DOI: 10.14498/vsgtu1543.
31. Khokhlov A.V. Analiz svoystv krivykh relaksatsii s nachalnoy stadiy ramp-deformirovaniya, porozhdayemykh nelineynoy teoriy nasledstvennosti Rabotnova [Analysis of Properties of Ramp Stress Relaxation Curves Produced by the Rabotnov Nonlinear Relation for Viscoelastic Materials]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials], 2018 (in press).
32. Khokhlov A.V. Asimptoticheskaya kommutativnost krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii v lineynoy teorii nasledstvennosti [Asymptotic Commutativity of Creep Curves at Piecewise-Constant Stress Produced by the Linear Viscoelasticity Theory]. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 1, pp. 70-82.
33. Khokhlov A.V. Dvustoronniye otsenki dlya funktsii relaksatsii lineynoy teorii nasledstvennosti cherez krivyye relaksatsii pri ramp-deformirovani i metodiki yeye identifikatsii [Two-Facet Bounds for Relaxation Modulus in the Linear Viscoelasticity via Relaxation Curves at Ramp Strain Histories and Identification Techniques]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk, Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2018, no. 3, pp. 81-104. DOI: 10.7868/S0572329918030108.
34. Khokhlov A.V. Kachestvennyy analiz obshchikh svoystv teoreticheskikh krivykh lineynogo opredelyayushchego sootnosheniya vyazkouprugosti [The Qualitative Analysis of Theoretic Curves Generated by Linear Viscoelasticity Constitutive Equation]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific Publication of BMSTU], 2016, no. 5, pp. 187-245. DOI: 10.7463/0516.0840650.
35. Khokhlov A.V. Krivye dlitelnoy prochnosti nelineynoy modeli vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvela i pravilo summirovaniya povrezhdennosti pri stupenchatykh nagruzheniyakh [Long-term Strength Curves Generated by the Nonlinear Maxwell-type Model for Viscoelastoplastic Materials and the Linear Damage Rule under Step Loading]. *Vestn. Samar. gos. tekhn. un-ta. Ser.: Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 524-543. DOI: 10.14498/vsgtu1512.
36. Khokhlov A.V. Krivyye polzuchesti i relaksatsii nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya Y.N. Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Creep and Relaxation Curves Produced by the Rabotnov Nonlinear Constitutive Relation for Viscoelastoplastic Materials]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2016, vol. 78, no. 4, pp. 452-466.

37. Khokhlov A.V. Kriterii razrusheniya i krivye dlitelnoy prochnosti porozhdayemye opredelyayushchim sootnosheniyem nelineynoy teorii nasledstvennosti Yu.N. Rabotnova [Failure Criterion and Long-Term Strength Curves Generated by the Rabotnov Nonlinear Constitutive Relation of Heredity Theory]. *Vestnik mashinostroeniya*, 2017, no. 6, pp. 39-46.
38. Khokhlov A.V. Nelineynaya model vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella: svoystva krivykh polzuchesti pri stupenchatykh nagruzheniyakh i usloviya nakopleniya plasticheskikh deformatsiy [The Nonlinear Maxwell-Type Viscoelastoplastic Model: Properties of Creep Curves at Piecewise-Constant Stress and Criteria for Plastic Strain Accumulation]. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 3, pp. 55-68.
39. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti pri postoyannoy skorosti deformatsii [General Properties of Stress-Strain Curves at Constant Strain Rate Yielding from Linear Theory of Viscoelasticity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity], 2015, vol. 77, no 1. pp. 60-74.
40. Khokhlov A.V. Opredelyayushchee sootnoshenie dlya reologicheskikh protsessov: svoystva teoreticheskikh krivykh polzuchesti i modelirovanie zatukhaniya pamyati [Constitutive Relation for Rheological Processes: Properties of Theoretic Creep Curves and Simulation of Memory Decay]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2007, vol. 42, no. 2, pp. 291-306. DOI: 10.3103/S0025654407020148.
41. Khokhlov A.V. Svoystva semeystva diagramm deformirovaniya, porozhdayemykh nelineynym sootnosheniyem Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Properties of Stress-Strain Curves Family Generated by the Rabotnov Nonlinear Relation for Viscoelastic Materials]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2018 (in press).
42. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *J. Biomech. Eng.* 2004, vol. 126, pp. 92-97.
43. Babaei B., Abramowitch S.D., Elson E.L., Thomopoulos S., Genin G.M. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials. *J. Royal. Soc. Interface*, 2015, vol. 12. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707.
44. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *J. of Biomechanics*, 2007, vol. 40, no. 14, pp. 3070-3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019.
45. Bergstrom J.S. *Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling*. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
46. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 367 p.
47. Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2009, vol. 13, no. 4, pp. 303-315. DOI: 10.1007/s11043-009-9089-6.
48. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 2007, vol. 6, no. 4, pp. 245-251.
49. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. Soc. A*, 2014, vol. 470, 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
50. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers. *Mechanics of Materials*, 2014, vol. 69, no. 1, pp. 116-131.
51. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*, 2009, vol. 205, pp. 23-33.
52. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Stress relaxation and recovery in tendon and ligament: Experiment and modeling. *Biorheology*, 2010, vol. 47, pp. 1-14.
53. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials. *Int. J. Fatigue*, 1998, vol. 20, no. 1, pp. 9-34. DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00081-9.
54. Findley W.N., Lai J.S., Onaran K. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Amsterdam, North Holland, 1976. 368 p.
55. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York, Springer-Verlag, 1993. 568 p.
56. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. Fung Y.C. et al. (eds.) *Biomechanics, Its Foundations and Objectives*. New Jersey, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972, pp. 181-208.

57. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, no. 4, pp. 512-521.
58. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
59. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *J. Biomech. Eng.*, 2000, vol. 122, pp. 15-22.
60. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: Application to incremental stress-relaxation experiments. *J. Biomech. Eng.*, 2003, vol. 125, no. 5, pp. 754-758. DOI: 10.1115/1.1615247.
61. Sauren A.A., Rousseau E.P. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. *J. Biomech. Eng.* 1983, vol. 105, pp. 92-95.
62. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Berlin, Springer, 1989. 769 p.
63. Woo S.L.-Y. Mechanical properties of tendons and ligaments – I. Quasi-static and nonlinear viscoelastic properties. *Biorheology*, 1982, vol. 19, pp. 385-396.

COMPARATIVE ANALYSIS OF CREEP CURVES PROPERTIES GENERATED BY LINEAR AND NONLINEAR HEREDITY THEORIES UNDER MULTI-STEP LOADINGS

Andrey Vladimirovich Khokhlov

Candidate of Technical Sciences,
Senior Researcher, Laboratory for Elasticity and Plasticity,
Scientific Research Institute for Mechanics, Lomonosov Moscow State University
andrey-khokhlov@ya.ru
Prosp. Michurinskiy, 1, 119192 Moscow, Russian Federation

Abstract. The general equation and basic properties of theoretic creep curves generated by the linear integral constitutive relation of viscoelasticity or by the Rabotnov nonlinear (quasi-linear) constitutive relation under arbitrary multi-step uni-axial loadings have been studied analytically with the implication that material functions are arbitrary.

The Rabotnov constitutive relation generalizes the Boltzmann-Volterra linear relation in a uni-axial case by introducing the second material function (the non-linearity function) beside the creep compliance. The Rabotnov equation is aimed at adequate modeling of the rheological phenomena set which is typical for isotropic rheonomic materials exhibiting non-linear hereditary properties, strong strain rate sensitivity and tension-compression asymmetry. The model is applicable for simulation of mechanical behaviour of various polymers, isotropic composites, metals and alloys, ceramics at high temperature, biological tissues and so on.

The qualitative features of the theoretic creep curves produced by the relations mentioned above are examined and compared to each other and to basic properties of typical test creep curves of viscoelastoplastic materials under multi-step uni-axial loadings in order to find out inherited (from linear viscoelasticity) properties and additional capabilities of the non-linear relation, to elucidate and compare the applicability (or non-applicability) scopes of the linear and quasi-linear relations, to reveal their abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena related to creep, recovery and cyclic creep, to find the zones of material functions influence and necessary phenomenological restrictions on material functions and to develop techniques for their identification and tuning. Assuming the material functions are arbitrary, we study analytically

the theoretic creep curves properties dependence on creep compliance function, the non-linearity function and parameters of loading programs. We analyze monotonicity and convexity intervals of creep curves, conditions for existence of extrema or flexure points, asymptotic behavior at infinity and deviation from the associated creep curve at constant stress, conditions for memory fading, the formula for plastic strain after complete unloading (after recovery), influence of a stress steps permutation and the asymptotic commutativity phenomenon, ratcheting rate and a criterion for non-accumulation of plastic strain under cyclic loadings, the relations for strain and strain rate jumps produced by given stress jumps and the phenomenon of elastic strain drift due to creep, etc. A number of effects are pointed out that the nonlinear model (and the linear theory as well) can't simulate whatever material functions are taken.

Key words: elastoviscoplasticity, multi-step loading, creep curves, asymptotics, recovery, memory decay, plastic strain accumulation, ratcheting, asymptotic commutativity, regular and singular models.