УДК 517.5+514.174.6

О СИСТЕМАХ ТЕТРАЭДРОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ДЕЛОНЕ ПУСТОТЫ ШАРА

А.Ю. Игумнов

В работе установлен критерий пустоты шара для систем тетраэдров, попарно не имеющих общих внутренних точек; доказан достаточный признак сохранения условия пустоты шара при отображении указанных систем для квазиизометрических отображений.

Ключевые слова: *система тетраэдров, пустой шар, сетка, решетка, квазиизометрические отображения.*

Введение

Понятие пустого шара для произвольной системы точек было введено Б.Н. Делоне в 1924 г. [21] в связи с геометрическим толкованием теоремы Г.Ф. Вороного ([2]) о совершенных квадратичных формах; также в [21] доказан критерий пустоты шара для решеток произвольного вида.

Понятие решетки (сетки) естественным образом возникает в теории приближенных вычислений, в частности при вычислении разного рода интегралов (кубатурные формулы [20]). Понятие пустого шара в последнее время интенсивно применяется и исследуется в геоинформатике и в приложениях к различным областям естествознания (см. [6; 14; 17–19]). Широкое применение в приложениях естественным образом влечет необходимость исследования свойств сеток с позиций общей математики. Классическим здесь является утверждение Альфорса о сохранении ориентации треугольника при квазиконформном отображении с определенными характеристиками [1]. Из недавних работ укажем [3; 8–11; 15; 16]. С применением понятия пустого шара в связи с построением сеток с нужными свойствами можно ознакомиться по работам [4; 7; 13], а также по обзору [12]. Некоторые результаты по рассматриваемой задаче изложены в [5].

1. Определения и обозначения

Определение 1. *([21]) Пусть дана какая-либо система точек в n-мерном пространстве и какой-либо шар. Шар называется пустым, если он не содержит точек этой системы.*

Определение 2. *Пусть $a_1, \dots, a_{n+1}$ — точки в R^n. Определим тетраэдр $T = a_1 \dots a_{n+1}$ с вершинами $a_1, \dots, a_{n+1}$ как выпуклую оболочку точек $a_1, \dots, a_{n+1}$. Тетраэдр T называется невырожденным, если его вершины не лежат в одной гиперплоскости.*

Обозначим S_T (B_T) сферу (шар), описанную вокруг тетраэдра T. Очевидно, всякий невырожденный тетраэдр T единственным образом определяет описанную вокруг него сферу (шар).

Переформулируем определение 1 применительно к системам точек, являющихся вершинами тетраэдров.

Определение 3. *Пусть T — некоторый невырожденный тетраэдр в R^n, a — некоторая точка в R^n. Будем говорить, что пара (T, a) удовлетворяет условию пустоты шара, если $B_T \not\ni a$.*

Определение 4. *Пусть T', T'' — невырожденные тетраэдры в R^n. Будем говорить, что пара тетраэдров T', T'' удовлетворяет условию пустоты шара, если это условие выполнено для всех пар (T', a''), где a'' — вершина тетраэдра T'', и для всех пар (T'', a'), где a' — вершина тетраэдра T'.*

Определение 5. *Пусть $\mathcal{T}$ — система невырожденных тетраэдров. Будем говорить, что в системе $\mathcal{T}$ выполнено условие пустоты шара, если для каждой пары T', T'' тетраэдров этой системы выполнено условие пустоты шара.*

2. Сохранение условия пустоты шара при преобразовании системы тетраэдров

Постановка задачи.

Пусть системе $\mathcal{T}$ тетраэдров в R^n поставлена в соответствие система $\mathcal{T}^*$ тетраэдров в R^n таким образом, что для любых двух точек a', a'' — вершин тетраэдров системы $\mathcal{T}$ и соответствующих им точек a'^*, a''^* — вершин тетраэдров системы $\mathcal{T}^*$ выполнено условие

$$l\,|a' - a''| \le |a'^* - a''^*| \le L\,|a' - a''|, \text{ где } l, L > 0. \tag{1}$$

Требуется определить условия на коэффициенты l, L выражения (1), обеспечивающие при указанном отображении сохранение условия пустоты шара.

3. Критерий пустоты шара. Обобщение леммы Делоне

Определение 6. *Пусть T' и T'' — невырожденные тетраэдры в R^n. Тетраэдры T', T'' называются смежными, если они имеют общую гипергрань и их вершины, не принадлежащие этой гиперграни, лежат по разные стороны гиперплоскости, определяемой этой гипергранью.*

Тетраэдры, удовлетворяющие определению 6, будем также называть тетраэдрами, смежными в обычном смысле.

Для систем смежных тетраэдров, регулярно разбивающих пространство R^n, имеет место следующая лемма (цит. по: [21], перевод наш. — *А.И.*).

Лемма 1. *[21] «Пусть T — совершенно произвольные тетраэдры, регулярно разбивающие n-мерное пространство, полностью соприкасающиеся $(n-1)$-мерными гранями, и такие, что любая ограниченная область (то есть область ограниченного диаметра) имеет общие точки только с конечным числом этих тетраэдров; тогда необходимое и достаточное условие того, что никакой из шаров, описанных вокруг любого из этих тетраэдров, не содержит внутри себя никаких вершин других тетраэдров, есть условие, что это будет иметь место для каждой пары двух* *тетраэдров, соприкасающихся по $(n-1)$-мерной грани, иначе говоря, в каждой такой паре вершина одного из тетраэдров не должна быть внутри шара, описанного вокруг другого тетраэдра, и обратно».*

Доказательство см. в [21].

Сформулируем теперь условия, которым должна удовлетворять система тетраэдров $\mathcal{T}$, и определение смежности в обобщенном смысле, позволяющие обобщить лемму Делоне:

Всякий тетраэдр системы $\mathcal{T}$ невырожден. (2)

Никакие два тетраэдра системы $\mathcal{T}$ не имеют общих внутренних точек. (3)

Любая ограниченная область имеет общие точки только с конечным числом тетраэдров системы $\mathcal{T}$. (4)

Определение 6 обобщим следующим образом.

Определение 7. *Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, удовлетворяющая условиям (2)–(4). Тетраэдры системы $\mathcal{T}$ называются смежными в системе $\mathcal{T}$ в обобщенном смысле, или $\mathcal{T}$-смежными, относительно гиперграней $\Gamma' \subset T'$, $\Gamma'' \subset T''$, если существуют a', a'' — внутренние точки тетраэдров T', T'' соответственно, такие, что отрезок $[a', a'']$ пересекает грани Γ', Γ'' и не пересекается с другими тетраэдрами системы $\mathcal{T}$.*

Сформулируем обобщение леммы 1.

Лемма 2. *Обобщение леммы Делоне.*
Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, удовлетворяющая условиям (2)–(4). Система $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию пустоты шара тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяют всякие два $\mathcal{T}$-смежных тетраэдра.

Доказательство леммы 2 почти дословно совпадает с доказательством леммы 1.

4. Критерий пустоты шара в частных случаях

По определению 5, система тетраэдров удовлетворяет условию пустоты шара тогда и только тогда, когда этому условию удовлетворяют все (упорядоченные) пары тетраэдров этой системы. Леммы 1 и 2 утверждают, что совокупность проверяемых пар тетраэдров можно уменьшить, проверяя на условие пустоты шара только те пары, тетраэдры которых смежны в обычном или в обобщенном смысле. Вводимые здесь понятия граничного и внутреннего тетраэдров семейства позволяют еще уменьшить совокупность пар тетраэдров, проверяемых на условие пустоты шара.

Определение 8. *Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, удовлетворяющая условиям (2)–(4); $D = \bigcup_{\mathcal{T}} T$. Тетраэдр $T \in \mathcal{T}$ называется граничным тетраэдром этой системы, если некоторая его гипергрань пересекается с границей множества D по $(n-1)$-мерному множеству. Совокупность всех граничных тетраэдров системы $\mathcal{T}$ будем обозначать $\partial\mathcal{T}$. Тетраэдры, не являющиеся граничными, будем называть внутренними.*

С учетом определения 8 лемму 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, удовлетворяющая условиям (2)–(4). Условие пустоты шара выполнено для системы $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда:*
1) это условие выполнено для каждой пары тетраэдров системы $\mathcal{T}$, смежных в обычном смысле;
2) это условие выполнено для всяких двух $\mathcal{T}$-смежных граничных тетраэдров системы.

В частности, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, удовлетворяющая условиям (2)–(4), и множество $D = \bigcup_{T\in\mathcal{T}} T$ — выпуклое. Условие пустоты шара выполнено для системы $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда оно выполнено для каждой пары смежных в обычном смысле тетраэдров системы $\mathcal{T}$.*

Доказательство. Из выпуклости D следует, что в системе $\mathcal{T}$ нет тетраэдров, смежных в обобщенном смысле, которые не были бы смежны в обычном смысле.

Рассматривая систему тетраэдров, как состоящую из нескольких подсистем, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_l$ — системы тетраэдров, удовлетворяющие условиям (2)–(4), для каждой из которых порознь выполнено условие пустоты шара. Пусть система $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{T}_l$ также удовлетворяет условиям (2)–(4). Для системы $\mathcal{T}$ условие пустоты шара выполнено тогда и только тогда, когда это условие выполнено для каждой пары тетраэдров $T' \in \partial\mathcal{T}_i$, $T'' \in \partial\mathcal{T}_j$, $1 \le i < j \le l$, смежных в обобщенном смысле в системе $\mathcal{T}$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 1.

Изложим соображения, исходя из которых будем формулировать достаточные условия на коэффициенты l, L.

- Достаточно обеспечить выполнение условия пустоты шара для всевозможных пар вида (T, a), где T — произвольный тетраэдр системы $\mathcal{T}$, a — любая из вершин тетраэдров системы $\mathcal{T}$ (то есть формулировать условия на l, L в локальном виде).

- При ортогональном отображении условие пустоты шара сохраняется. А именно, пусть T', T'' — тетраэдры в R^n, a', a'' — точки в R^n и пусть пара (T', a') удовлетворяет условию пустоты шара. Если O — некоторое ортогональное преобразование, и $T'' = O(T')$, $a'' = O(a')$, то пара (T'', a'') также удовлетворяет условию пустоты шара.

- Если при некотором сопоставлении $(T', a') \mapsto (T'', a'')$ условие пустоты шара нарушается, то возможны только два случая:

  1) Тетраэдр T'' невырожден. Тогда условие пустоты шара будет нарушено по причине $a'' \in B_{T''}$.

  2) Тетраэдр T'' вырожден. Тогда, очевидно, для любой точки a'' пара (T'', a'') не удовлетворяет условию пустоты шара (в том смысле, что в силу неединственности шара $B_{T''}$ в случае вырожденности тетраэдра T'', для любой точки a'' можно указать шар $B_{T''} \ni a''$).

Исходя из изложенного, степень отличия рассматриваемого преобразования от ортогонального может описываться посредством двух числовых величин, одна из которых должна характеризовать максимальную степень отличия отображения от ортогонального, при которой заведомо невозможен случай 1), а другая — максимальную степень отличия отображения от ортогонального, при которой заведомо невозможен случай 2). При этом сами числовые величины должны быть инвариантны относительно ортогональных преобразований.

В качестве таких величин предлагаются следующие.

Для случая 1). Пусть $T = a_1 \ldots a_{n+1}$ — невырожденный тетраэдр в R^n, $a = a_{n+2}$ — точка в R^n, отличная от точек $a_1 \ldots a_{n+1}$. Полагая пару (T, a) фиксированной и удовлетворяющей условию пустоты шара, определим на множестве пар вида (T', a'), где $T = a'_1 \ldots a'_{n+1}$ — тетраэдр и $a' = a'_{n+2}$ — точка в R^n, числовую функцию k следующим образом:

$$k((T,a);(T',a')) = \frac{\min\left\{\dfrac{|a'_i a'_j|}{|a_i a_j|},\ 1 \le i < j \le n+2\right\}}{\max\left\{\dfrac{|a'_i a'_j|}{|a_i a_j|},\ 1 \le i < j \le n+2\right\}}, \tag{5}$$

полагая здесь $k((T,a);(T',a')) = 0$ при $a'_1 = a'_2 = \ldots = a'_{n+1} = a'_{n+2}$.

Для случая 2). Считая тетраэдр $T = a_1 \ldots a_{n+1}$ невырожденным и фиксированным, определим на множестве тетраэдров T' вида $T' = a'_1 \ldots a'_{n+1}$ числовую функцию

$$q(T;T') = \frac{\min\left\{\dfrac{|a'_i a'_j|}{|a_i a_j|},\ 1 \le i < j \le n+1\right\}}{\max\left\{\dfrac{|a'_i a'_j|}{|a_i a_j|},\ 1 \le i < j \le n+1\right\}}, \tag{6}$$

полагая $q(T;T') = 0$ при $a'_1 = a'_2 = \ldots = a'_{n+1}$.

Непосредственно из определения функций k, q вытекают следующие их свойства.

Свойство 1. Функция k непрерывна как функция точек $a'_1, \ldots, a'_{n+1}$ и принимает значения от нуля до единицы.

Свойство 2. Функция k инвариантна относительно ортогональных преобразований. То есть, если $T'' = O(T')$ и $a'' = O(a')$ для некоторого ортогонального преобразования O, то $k((T,a);(T',a')) = k((T,a);(T'',a''))$.

Свойство 3. $k((T,a);(T',a')) = 1$ тогда и только тогда, когда $T' = O(T)$ и $a' = O(a)$ для некоторого ортогонального преобразования O. В частности, $k((T,a);(T,a)) = 1$.

Свойство 4. $k((T,a);(T',a')) = 0$ тогда и только тогда, когда для каких-либо двух точек a_i, a_j, $1 \le i,j \le n+2$, удовлетворяющих условию $|a_i a_j| \ne 0$, выполнено $|a'_i a'_j| = 0$.

Свойство 5. Функция q непрерывна как функция точек $a'_1, \ldots, a'_{n+1}$ и принимает значения от нуля до единицы.

Свойство 6. Функция q инвариантна относительно ортогональных преобразований.

Свойство 7. $q(T;T') = 1$ тогда и только тогда, когда $T' = O(T)$ для некоторого ортогонального преобразования O. В частности, $q(T;T) = 1$.

Свойство 8. $q(T;T') = 0$ тогда и только тогда, когда для каких-либо двух точек a'_i, a'_j, $1 \le i < j \le n+1$, выполнено $|a'_i a'_j| = 0$.

Для формулировки определения числовых величин, характеризующих максимальную степень отличия рассматриваемого отображения от ортогонального, при которой заведомо сохраняется условие пустоты шара, нам потребуются некоторые сведения о структуре множества значений функций k и q.

Рассмотрим сначала функцию k. Множество ее значений разобьем на классы:
$E_1 = \{l \in [0,1]$: для любой пары (T', x) из множества l-уровня функции k выполнено условие пустоты шара$\}$;
$E_2 = [0,1] \setminus E_1$, то есть
$E_2 = \{l \in [0,1]$: существует пара (T', x), принадлежащая множеству l-уровня функции k, для которой условие пустоты шара не выполнено$\}$.

Поскольку пара (T, a) удовлетворяет условию пустоты шара, то $E_1 \ni 1$. Очевидно, что также $E_2 \ni 0$.

Из условия $E_2 = [0,1] \setminus E_1$ следует, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и $E_1 \cup E_2 = [0,1]$.

Лемма 3. *Пусть $l \in E_2$. Если $l' < l$, то $l' \in E_2$.*

Доказательство. Пусть (T', b) — такая пара, что $b \in B_T$ и $k((T,a);(T',b)) = l$. Точку b соединим отрезком с одной из вершин c тетраэдра T', не совпадающей с точкой a. Пусть t — точка отрезка $[b,c]$. Функция $k((T,a);(T',t))$, очевидно, непрерывна на $[b,c]$, принимает значение l при $t = b$ и значение 0 при $t = c$. Значит, существует точка $t' \in [b,c]$ такая, что $k((T,a);(T',t')) = l'$.

Таким образом, для числа l' существует пара (T', t'), на которой значение функции k равно l' и которая, очевидно, не удовлетворяет условию пустоты шара.

Следствие 1. *Класс E_2 множества значений функции k имеет либо вид $(0, U]$, либо вид $(0, U)$, где U — некоторое число, не превосходящее единицы.*

Аналогичное утверждение имеет место для функции q. Множество значений функции q разобьем на классы:
$F_1 = \{l \in [0,1]$: всякий тетраэдр T' из множества l-уровня функции q невырожден $\}$;
$F_2 = [0,1] \setminus F_1$, то есть
$F_2 = \{l \in [0,1]$: во множестве l-уровня функции q имеется вырожденный тетраэдр$\}$.

В силу условия невырожденности тетраэдра T имеем: $F_1 \ni 1$. Далее, поскольку тетраэдр, у которого хотя бы две вершины совпадают (и поэтому значение функции q на нем равно нулю), является вырожденным, то $F_2 \ni 0$.

Лемма 4. *Пусть $l \in F_2$. Если $l' < l$, то $l' \in F_2$.*

Доказательство. Пусть T' — вырожденный тетраэдр, для которого $q(T;T') = l$.

Если все вершины тетраэдра T' совпадают, то, очевидно, $l = 0$ и доказывать нечего.

Пусть $l > 0$; a', a'' — несовпадающие вершины тетраэдра T', и t — точка отрезка $[a', a'']$. Рассмотрим тетраэдр T'_t, одной из вершин которого является точка t, остальными вершинами являются вершины тетраэдра T', не совпадающие с вершиной a'. Функция $q(T, T'_t)$ является, очевидно, непрерывной функцией точки t, принимает значение l при $t = a'$ (так как в этом случае $T'_t = T'$) и значение 0 при $t = a''$ (так как в этом случае ребро $a''t$ имеет нулевую длину). Значит, существует точка $t' \in [a', a'']$ такая, что $q(T', T'_t) = l'$.

Следствие 2. *Класс F_2 множества значений функции q имеет либо вид $[0, V]$, либо вид $[0, V)$, где V — некоторое число, не превосходящее единицы.*

Положим
$$K(T,a) = \sup_{(T',a'):\ B_{T'} \ni a'} k((T,a);(T',a'))$$
и
$$Q(T) = \sup_{T':\ \text{вырожденный}} q(T;T').$$

Таким образом, величины K, Q характеризуют максимальную степень отличия соответствия $(T,a) \mapsto (T',a')$ от ортогонального преобразования, при которой заведомо сохраняется условие пустоты шара. А именно, имеет место следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть (T,a) — пара, удовлетворяющая условию пустоты шара.*

Если для некоторой пары (T^*,a^*) выполнены условия
$$k((T,a);(T^*,a^*)) \geq K(T,a) \text{ и } q(T,T^*) > Q(T),$$
то пара (T^*,a^*) также удовлетворяет условию пустоты шара.

Доказательство непосредственно следует из определения величин K, Q и следствий 1, 2.

Следующая лемма дает оценку величин k, q через величины l, L, указанные в выражении (1).

Лемма 6. *Пусть $T = a_1 \ldots a_{n+1}$ и $T^* = a_1^* \ldots a_{n+1}^*$ — невырожденные тетраэдры в R^n, $a = a_{n+2}$ и $a^* = a_{n+2}^*$ — точки в R^n такие, что для соответствия $(T,a) \mapsto (T^*,a^*)$ выполнено условие вида (1).*

Тогда
$$k((T,a);(T^*,a^*)) \leq l/L,$$
$$q(T,T^*) \leq l/L.$$

Доказательство непосредственно следует из неравенства (1).

Сформулируем теперь достаточный признак сохранения условия пустоты шара при квазиизометрическом отображении пары (T,a).

Теорема 4. *Пусть (T,a) — пара, удовлетворяющая условию пустоты шара; (T^*,a^*) — такая пара, что для соответствия $(T,a) \mapsto (T^*,a^*)$ выполнено условие вида (1).*

Если $l/L \geq K(T,a)$ и $l/L > Q(T)$, то пара (T^*,a^*) также удовлетворяет условию пустоты шара.

Доказательство непосредственно вытекает из лемм 6, 5.

Для формулировки достаточного признака сохранения условия пустоты шара при преобразовании системы тетраэдров введем некоторые обозначения.

Если $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, то обозначим $A_{\mathcal{T}}$ — множество вершин тетраэдров этой системы. Пусть на множестве $A_{\mathcal{T}}$ задано отображение $f : A_{\mathcal{T}} \to A_{\mathcal{T}}^*$. Если $T = a_1 \ldots a_{n+1}$ — тетраэдр системы $\mathcal{T}$, то обозначим $T_f = f(a_1) \ldots f(a_{n+1})$ — тетраэдр, вершинами которого являются образы вершин тетраэдра T при отображении f. Тем самым отображение f задает соответствие $f : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}_f$, где тетраэдрами семейства $\mathcal{T}_f$ являются тетраэдры вида T_f.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{T}$ — система тетраэдров, удовлетворяющая условиям (2)–(4), и $f : A_{\mathcal{T}} \to A^*_{\mathcal{T}}$ — отображение, заданное на множестве вершин тетраэдров семейства $\mathcal{T}$.*

Пусть для всякого тетраэдра $T = a_1 \dots a_{n+1} \in \mathcal{T}$ и всякой вершины a любого тетраэдра системы $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$-смежного с тетраэдром T, выполнены условия вида (1):

$$l_{(T,a)}|x' - x''| \leq |f(x') - f(x'')| \leq L_{(T,a)}|x' - x''|, \tag{7}$$

где $x', x'' \in \{a_1, \dots, a_{n+1}, a\}$, $l_{(T,a)}$, $L_{(T,a)}$ — некоторые положительные числа.

Пусть система $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию пустоты шара.

Если

$$\frac{l_{(T,a)}}{L_{(T,a)}} \geq K(T,a) \text{ и } \frac{l_{(T,a)}}{L_{(T,a)}} > Q(T),$$

то система $\mathcal{T}^*$ также удовлетворяет условию пустоты шара.

Доказательство непосредственно следует из леммы 6 и теоремы 4.

Комбинируя теоремы 4, 5 с различными формами критериев пустоты шара для системы тетраэдров, мы можем получать другие формулировки достаточных признаков сохранения условия пустоты шара.

Автор выражает признательность В.М. Миклюкову за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альфорс, Л. Лекции о квазиконформных отображениях : пер. с англ. / Л. Альфорс. — М. : Мир, 1969. — 154 с.
2. Вороной, Г. Ф. Исследования по теории примитивных параллелоэдров. Собр. соч. Т. 2. / Г. Ф. Вороной. — Киев : Изд. АН УССР, 1952. — 482 с.
3. Грачева, Е. А. Кусочно-линейное интерполирование поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках / Е. А. Грачева, В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — Вып. 3. — С. 157–167.
4. Иванов, Е. Г. Автоматическая генерация трехмерных неструктурированных сеток для вычислительной механики (на англ. языке) / Е. Г. Иванов // Вычислительные технологии. — 2006. — Т. 11, № 1. — С. 3–17.
5. Игумнов, А. Ю. Об отображениях, сохраняющих условие пустоты сферы / А. Ю. Игумнов // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — Вып. 2. — С. 65–73.
6. Исследование пространственных корреляций межатомных пустот в молекулярных жидкостях с помощью симплексов Делоне / М. Г. Алинченко, А. В. Аникеенко, В. П. Волошин, Н. Н. Медведев, Д. Пашек, А. Аппельхаген, А. Гайгер // Журнал структурной химии. — 2006. — Т. 47. Приложение. — С. 122–128.

7. Карабцев, С. Н. Построение диаграммы Вороного и определение границ области в методе естественных соседей / С. Н. Карабцев, С. В. Стуколов // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 13, № 3. — С. 65–80.
8. Клячин, А. А. Аппроксимация минимальных поверхностей кусочно-полиномиальными функциями / А. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 198–206.
9. Клячин, А. А. О сходимости приближенных решений уравнения минимальных поверхностей / А. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — Вып. 3. — С. 102–105.
10. Клячин, В. А. Об одном обобщении условия Делоне / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — Вып. 2. — С. 102–107.
11. Клячин, В. А. О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию / В. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2009. — Вып. 4. — С. 169–182.
12. Круглякова, Л. В. Неструктурированные адаптивные сетки для задач математической физики (обзор) / Л. В. Круглякова, А. В. Неледова, В. Ф. Тишкин, А. Ю. Филатов // Математическое моделирование. — 1998. — Т. 10, № 3. — С. 93–116.
13. Лебедев, А. С. Построение неструктурированных треугольных сеток с почти правильными ячейками / А. С. Лебедев // Вычислительные технологии. — 2010. — Т. 15, № 1. — С. 85–97.
14. Медведев, Н. Н. Метод Вороного — Делоне в исследовании структуры некристаллических систем / Н. Н. Медведев. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. — 214 с.
15. Миклюков, В. М. Введение в негладкий анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2008. — 424 с.
16. Миклюков, В. М. Некоторые задачи, возникающие в проблеме триангуляции пограничного слоя / В. М. Миклюков // Записки семинара «Сверхмедленные процессы» / ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов ; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В. М. Миклюкова. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2006. — Вып. 1. — С. 154–162.
17. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: Введение : пер. с англ. / Ф. Препарата, М. Шеймос. — М. : Мир, 1989. — 478 с.
18. Роик А. С. Моделирование и анализ структуры жидких металлов методами обратного Монте-Карло и Вороного — Делоне / А. С. Роик, В. П. Казимиров, В. Э. Сокольский // Журнал структурной химии. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 683–691.
19. Скворцов, А. В. Геоинформатика / А. В. Скворцов. — Томск : Изд-во Том. ун-та, 2005. — 268 с.
20. Соболев С. Л. Теория кубатурных формул / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1974. — 808 с.
21. Delaunay, B. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï / B. Delaunay // Известия Академии наук СССР. — 1934. — № 6. — С. 793–800.

ON TETRAHEDRON SYSTEMS SATISFYING DELONE OF EMPTY BALL CONDITION

A.Yu. Igumnov

Criterion of emptiness ball condition for tetrahedrons systems that have not common interior points is prooved. Sufficient sign of the condition preservation byliptshits mappings of the systems is prooved.

Key words: *tetrahedron, empty ball, net, lattice, quasiisometriques images.*