www.volsu.ru
МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.3.3
УДК 517.951, 519.632
ББК 22.161, 22.19

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАМКНУТЫМИ ПРОСТЫМИ КРИВЫМИ

Алексей Александрович Клячин
Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой
математического анализа и теории функций,
Волгоградский государственный университет
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В настоящее время метод триангуляции широко применяется во многих вычислительных задачах, например, при использовании метода конечных элементов (МКЭ). Применение треугольных сеток при решении различных краевых задач обусловлено еще и тем, что на них достаточно легко и с необходимой точностью могут быть аппроксимированы производные любого порядка. В этом случае процесс расчета, как правило, можно унифицировать и организовать так, чтобы зависимость от сетки была минимальной [5]. Поэтому востребованной задачей является разработка алгоритмов триангуляции областей, не требующих много времени на выполнение и не затрачивающих большой объем компьютерных ресурсов. В работе [6] нами был представлен один такой алгоритм, основанный на применении процесса измельчения треугольников триангуляции. В настоящей работе мы описываем другой подход к построению треугольной сетки для произвольной плоской области, ограниченной простой замкнутой кривой, и даем оценку минимального синуса угла треугольников при выполнении определенных геометрических условий.

Ключевые слова: триангуляция, треугольник, минимальный угол триангуляции, разбиение области, условие Липшица.

1. Описание алгоритма триангуляции области

Пусть задан конечный набор точек $\{P_i\}_{i=1}^m$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. *Триангуляцией данного набора точек* называется совокупность невырожденных треугольников $\mathcal{T} = \{T_j\}_{j=1}^N$, удовлетворяющих условиям:

1. любая точка P_i является вершиной хотя бы одного треугольника T_j;
2. каждый треугольник T_j содержит только три точки из данного набора, являющиеся вершинами этого треугольника.

Через $\alpha(\mathcal{T})$ обозначим угол, на котором достигается минимум синуса среди всех углов всех треугольников триангуляции $\mathcal{T}$.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. *Триангуляцией области* Ω называется триангуляция произвольного конечного набора точек, лежащего в замыкании области Ω.

Рассмотрим частный случай области, которая задана следующим образом

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \varphi < 2\pi, r < \rho(\varphi)\},$$

где (φ, r) — полярные координаты точки (x, y) и $\rho(\varphi)$ — непрерывная положительная функция, заданная на $[0, 2\pi)$. Идея построения триангуляции этой области исходит из метода триангуляции круга (см., например, [4]).

Итак, зафиксируем натуральные числа n и m. Рассмотрим следующий набор точек, лежащих в замыкании области Ω

$$A_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}),$$

$$x_{ij} = \frac{j}{m}\rho(\varphi_{ij})\cos(\varphi_{ij}), \quad y_{ij} = \frac{j}{m}\rho(\varphi_{ij})\sin(\varphi_{ij}),$$

где $\varphi_{ij} = 2\pi i/(jn)$ и $j = 1, ..., m$, $i = 0, ..., nj - 1$. В случае, когда $i = 0$, $j = 0$ полагаем $x_{00} = 0, y_{00} = 0$. Не сложно подсчитать, что общее количество полученных точек равно $N_p = 1 + nm(m + 1)/2$.

Формирование треугольников осуществляется так. Вначале строим n треугольников с вершинами в точках $A_{00}, A_{01}, A_{11}..., A_{n-1,1}$. Получаем треугольники

$$\Delta A_{00}A_{01}A_{11},\ \Delta A_{00}A_{11}A_{21},\ \ldots,\ \Delta A_{00}A_{n-2,1}A_{n-1,1},\ \Delta A_{00}A_{n-1,1}A_{01}.$$

Далее будем вершины соединять в треугольники по n секторам, определяемым парами полярных углов $(0, 2\pi/n)$,$(2\pi/n, 4\pi/n)$,$\ldots$, $(2(n-2)\pi/n, 2(n-1)\pi/n)$ и $(2(n-1)\pi/n), 2\pi)$. Зафиксируем номер сектора $s = 1, ..., n - 1$. Тогда на кривой S_j, $j = 1, m - 1$, меняя i от $(s - 1)j$ до $sj - 1$, сформируем треугольники

$$\Delta A_{i,j}A_{i+s-1,j+1}A_{i+s,j+1},\ \Delta A_{i,j}A_{i+s,j+1}A_{i+1,j}.$$

А для $i = sj$ образуем только один первый треугольник.

Так как последний сектор «склеивается» с первым, то для него рассмотрим треугольники отдельно. Пусть $s = n$. Тогда, меняя i от $(s - 1)j$ до $sj - 2$, сформируем треугольники

$$\Delta A_{i,j}A_{i+n-1,j+1}A_{i+n,j+1},\ \Delta A_{i,j}A_{i+n,j+1}A_{i+1,j}.$$

В случае, если $i = sj - 1$, добавляем два треугольника

$$\Delta A_{sj-1,j}A_{s(j+1)-2,j+1}A_{s(j+1),j+1},\ \ \Delta A_{sj-1,j}A_{s(j+1),j+1}A_{0,j}.$$

И, наконец, для $i = sj$ формируем последний в j-м слое треугольник с вершинами $A_{0,j}$, $A_{s(j+1)-1,j+1}$ и $A_{0,j+1}$. Не сложно показать, что общее количество полученных треугольников равно $N_t = nm^2$.

2. Оценка качества триангуляции

Одной из важных геометрических характеристик треугольной сетки является величина $\sin\alpha(\mathcal{T})$. Отметим, что в некоторых случаях она определяет коэффициент погрешности вычисления производных функций при их аппроксимации алгебраическими многочленами в треугольниках (см. работы [1–3; 7–15]).

Ниже мы приводим оценку синуса угла всякого треугольника построенной триангуляции. Ясно, что достаточно рассмотреть треугольники для первого сектора, то есть при $s = 1$. Положим $\rho_{ij} = \rho(\varphi_{ij})$. Определим две величины

$$A = \max_{[0,2\pi)} \rho(\varphi), \quad a = \min_{[0,2\pi)} \rho(\varphi).$$

Рассмотрим в треугольнике $A_{ij}A_{i,j+1}A_{i+1,j+1}$ угол при вершине A_{ij}. Не сложно вычислить площадь S этого треугольника

$$S = \frac{1}{2m^2}\left((j+1)^2\rho_{i,j+1}\rho_{i+1,j+1}\sin(\varphi_{i+1,j+1}-\varphi_{i,j+1}) + \right.$$

$$\left. + j(j+1)\rho_{ij}\rho_{i,j+1}\sin(\varphi_{ij+1}-\varphi_{ij}) - j(j+1)\rho_{ij}\rho_{i+1,j+1}\sin(\varphi_{i+1,j+1}-\varphi_{ij})\right). \qquad (1)$$

Дадим оценку снизу величины площади. Используя равенства

$$\varphi_{i+1,j+1}-\varphi_{i,j+1} = \frac{2\pi}{n(j+1)}, \varphi_{i,j+1}-\varphi_{i,j} = -\frac{2\pi i}{n(j+1)j}, \varphi_{i+1,j+1}-\varphi_{i,j} = \frac{2\pi(j-i)}{n(j+1)j},$$

получаем

$$S = \frac{1}{2m^2}\left((j+1)^2\rho_{i,j+1}\rho_{i+1,j+1}\sin\frac{2\pi}{n(j+1)} - \right.$$

$$\left. - j(j+1)\rho_{ij}\rho_{i,j+1}\sin\frac{2\pi i}{n(j+1)j} - j(j+1)\rho_{ij}\rho_{i+1,j+1}\sin\frac{2\pi(j-i)}{n(j+1)j}\right). \qquad (2)$$

Далее, пользуясь стандартными тригонометрическими формулами, получаем

$$(j+1)^2\rho_{i,j+1}\rho_{i+1,j+1}\sin\frac{2\pi}{n(j+1)} - j(j+1)\rho_{ij}\left(\rho_{i,j+1}\sin\frac{2\pi i}{n(j+1)j} + \rho_{i+1,j+1}\sin\frac{2\pi(j-i)}{n(j+1)j}\right) =$$

$$= \rho_{i,j+1}\rho_{i+1,j+1}\left((j+1)^2\sin\frac{2\pi}{n(j+1)} - j(j+1)\sin\frac{2\pi i}{nj(j+1)} - j(j+1)\sin\frac{2\pi(j-i)}{nj(j+1)}\right) +$$

$$+ j(j+1)\rho_{i,j+1}(\rho_{i+1,j+1}-\rho_{ij})\sin\frac{2\pi i}{nj(j+1)} + j(j+1)\rho_{i+1,j+1}(\rho_{i,j+1}-\rho_{ij})\sin\frac{2\pi(j-i)}{nj(j+1)} =$$

$$= \rho_{i,j+1}\rho_{i+1,j+1}2(j+1)\sin\frac{\pi}{n(j+1)}\left((j+1)\cos\frac{\pi}{n(j+1)} - j\cos\frac{\pi(2i-j)}{nj(j+1)}\right) +$$

$$+ j(j+1)\rho_{i,j+1}(\rho_{i+1,j+1}-\rho_{ij})\sin\frac{2\pi i}{nj(j+1)} + j(j+1)\rho_{i+1,j+1}(\rho_{i,j+1}-\rho_{ij})\sin\frac{2\pi(j-i)}{nj(j+1)} =$$

$$= \rho_{i,j+1}\rho_{i+1,j+1}2(j+1)\sin\frac{\pi}{n(j+1)}\left(\cos\frac{\pi}{n(j+1)} - 2j\sin\frac{\pi i}{nj(j+1)}\sin\frac{\pi(j-i)}{nj(j+1)}\right) +$$

$$+ j(j+1)\rho_{i,j+1}(\rho_{i+1,j+1}-\rho_{ij})\sin\frac{2\pi i}{nj(j+1)} + j(j+1)\rho_{i+1,j+1}(\rho_{i,j+1}-\rho_{ij})\sin\frac{2\pi(j-i)}{nj(j+1)}.$$

Будем предполагать, что функция $\rho = \rho(\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица вида

$$|\rho(\varphi') - \rho(\varphi'')| \leq LA|\varphi' - \varphi''|$$

с некоторой постоянной $L > 0$. Тогда

$$\rho_{i,j+1} - \rho_{ij} \geq LA(\varphi_{i,j+1} - \varphi_{ij}) = -L\frac{2\pi i}{n(j+1)j}$$

и

$$\rho_{i+1,j+1} - \rho_{ij} \geq -LA(\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{ij}) = -L\frac{2\pi(j-i)}{nj(j+1)}.$$

Далее, не сложно видеть, что

$$\cos\frac{\pi}{n(j+1)} - 2j\sin\frac{\pi i}{n(j+1)j}\sin\frac{\pi(j-i)}{n(j+1)j} \geq \cos\frac{\pi}{n(j+1)} - \frac{2\pi^2 ij(j-i)}{n^2(j+1)^2j^2} \geq \cos\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

Отметим, что при $n \geq 3$ выполняется $0 < \frac{\pi}{n(j+1)} \leq \pi/6$ и, следовательно,

$$(j+1)\sin\frac{\pi}{n(j+1)} \geq 2\sin\frac{\pi}{2n}$$

и

$$\cos\frac{\pi}{n(j+1)} \geq \cos\frac{\pi}{2n}.$$

Применяя полученные неравенства, имеем

$$S \geq \frac{4}{m^2}\left(a^2\sin\frac{\pi}{2n}(\cos\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi^2}{4n^2}) - LA^2\frac{\pi^2}{n^2}\right).$$

Для оценки величины $\sin\alpha(\mathcal{T})$ вычислим длины сторон выбранного треугольника $A_{ij}A_{i,j+1}$ и $A_{ij}A_{i+1,j+1}$

$$|A_{ij}A_{i,j+1}|^2 = \frac{1}{m^2}\left(((j+1)\rho_{i,j+1}\cos\varphi_{i,j+1} - j\rho_{i,j}\cos\varphi_{i,j})^2 + ((j+1)\rho_{i,j+1}\sin\varphi_{i,j+1} - \right.$$

$$\left. - j\rho_{i,j}\sin\varphi_{i,j}^2\right) = \frac{1}{m^2}\left(((+1)\rho_{i,j+1} - j\rho_{ij})^2 + 2j(j+1)\rho_{i,j+1}\rho_{ij}\sin^2\frac{\pi i}{nj(j+1)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{m^2}A^2\left((2L\frac{\pi}{n}+1)^2 + \frac{\pi^2}{n^2}\right).$$

Остальные стороны оцениваются аналогично. Итак, приходим к неравенству

$$\sin\alpha(\mathcal{T}) \geq \frac{8\left(a^2\sin\frac{\pi}{2n}(\cos\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi^2}{4n^2})-LA^2\frac{\pi^2}{n^2}\right)}{A^2\left((2L\frac{\pi}{n}+1)^2+\frac{\pi^2}{n^2}\right)}.$$

Данное неравенство справедливо, если значение числителя положительно

$$8\left(a^2\sin\frac{\pi}{2n}(\cos\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi^2}{4n^2})-LA^2\frac{\pi^2}{n^2}\right)>0.$$

Это условие выполнено, например, для достаточно большого n или достаточно малого L. Если взять частный случай, когда область является кругом, то $L=0$ и соответствующий числитель будет положительным при $n \geq 3$.

3. Некоторые примеры построения триангуляций

Рассмотрим несколько примеров построения треугольной сетки в областях, ограниченных замкнутыми кривыми, задаваемыми в полярной системе координат уравнением $r=\rho(\varphi)$.

Пример 1. Пусть $\rho(\varphi) = 2+0,3\sin 8\varphi$ при $\varphi\in[0,2\pi]$. Для $n=6$ получаем триангуляцию, в центре которой располагается шестиугольник (рис. 1).

Пример 2. Предположим, что

$$\rho=\frac{3}{1.5+\sin^2 2\varphi}.$$

Для построения триангуляции положим $n=4$ (рис. 2).

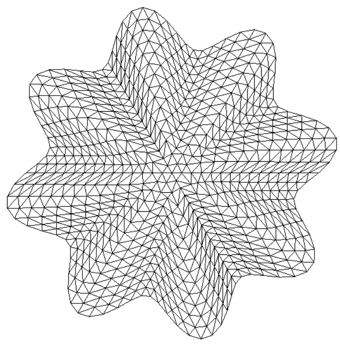

Рис. 1. Триангуляция области при $\rho = 2+0{,}3\sin 8\varphi$

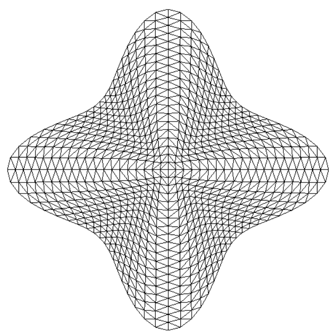

Рис. 2. Триангуляция области при $\rho = 3/(1{,}5+\sin^2 2\varphi)$

Пример 3. Рассмотрим область, ограниченную кривой, заданной уравнением $x^4+y^4=16$. В этом случае (рис. 3)

$$\rho(\varphi)=\frac{2}{\sqrt[4]{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}.$$

Пример 4. На рисунке 4 приводится область и ее треугольная сетка, ограниченная кривой $\rho=2/(1,5+0,2\sin(4\varphi)+0,1\cos(6\varphi))$.

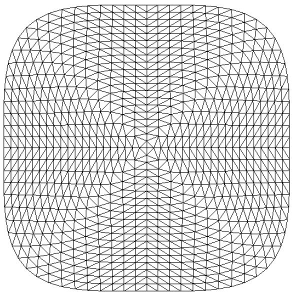

Рис. 3. Триангуляция области $x^4 + y^4 < 16$

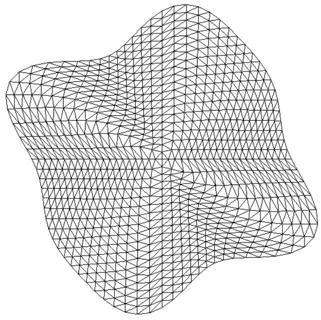

Рис. 4. Триангуляция области при $\rho = 2/(1{,}5 + 0{,}2\sin(4\varphi) + 0{,}1\cos(6\varphi))$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байдакова, Н. В. Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях / Н. В. Байдакова // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 83–97.

2. Байдакова, Н. В. Оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных в конечном элементе Сие–Клафа–Точера / Н. В. Байдакова // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 80–89.

3. Байдакова, Н. В. Новые оценки величин погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции многочленами третьей степени на треугольнике / Н. В. Байдакова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13:1, № 2. — С. 15–19.

4. Галанин, М. П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы / М. П. Галанин, И. А. Щеглов // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. — 2006. — С. 1–32.

5. Григорьева, Е. Г. Универсальный программный комплекс для решения многомерных вариационных задач / Е. Г. Григорьева, В. А. Клячин, А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2017. — № 2 (39). — С. 39–55. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2017.2.4.

6. Клячин, А. А. Построение триангуляции плоских областей методом измельчения. / А. А. Клячин // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2017. — № 2 (39). — С. 18–28. — DOI: 10.15688/jvolsu1.2017.2.2.

7. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2010. — Т. 78, № 4. — С. 51–55.

8. Клячин, В. А. Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства / В. А. Клячин, А. А. Широкий // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 1. — С. 31–39.

9. Клячин, В. А. Коэффициент изопериметричности симплекса в задаче аппроксимации производных / В. А. Клячин, Д. В. Шуркаева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 151–160.

10. Латыпова, Н. В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике / Н. В. Латыпова // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. — 2003. — С. 3–10.

11. Матвеева, Ю. В. Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных / Ю. В. Матвеева // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 7, № 1. — С. 23–27.

12. Субботин, Ю. Н. Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция / Ю. Н. Субботин // Методы аппроксимации и интерполяции. — Новосибирск : Изд-во ВЦН, 1981. — С. 148–153.

13. Субботин, Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции / Ю. Н. Субботин // Тр. МИАН. — 1989. — Т. 189. — С. 117–137.

14. Субботин, Ю. Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника / Ю. Н. Субботин // Тр. ИММ УрО РАН. — 1992. — Т. 2. — С. 110–119.

15. Babuska, I. On the angle condition in the finite element method / I. Babuska, A. K. Aziz // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — Vol. 13, № 2. — P. 214–226.

REFERENCES

1. Baydakova N.V. Vliyanie gladkosti na pogreshnost approksimatsii proizvodnykh pri lokalnoy interpolyatsii na triangulyatsiyakh [Influence of Smoothness on the Error of Approximation of Derivatives under Local Interpolation on Triangulations]. *Tr. IMM UrO RAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)], 2011, vol. 17, no. 3, pp. 83-97.

2. Baydakova N.V. Otsenki sverkhu velichiny pogreshnosti approksimatsii proizvodnykh v konechnom elemente Sie–Klafa–Tochera [Upper Estimates for the Error of Approximation of Derivatives in a Finite Element of Hsieh--Clough--Tocher Type]. *Tr. IMM UrO RAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)], 2012, vol. 18, no. 4, pp. 80-89.

3. Baydakova N.V. Novye otsenki velichin pogreshnosti approksimatsii proizvodnykh pri interpolyatsii funktsii mnogochlenami tretyey stepeni na treugolnike [New Estimates of the Error of Approximation of Derivatives of the Interpolation Functions of Polynomials of the Third Degree on a Triangle]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13:1, no. 2, pp. 15-19.

4. Galanin M.P., Shcheglov I.A. Razrabotka i realizatsiya algoritmov trekhmernoy triangulyatsii slozhnykh prostranstvennykh oblastey: pryamye metody [Development and Implementation of Three-Dimencion Triangulation Algorythms of Complex Spacial Domains: Direct Methods]. *Preprint IPM im. M.V. Keldysha RAN*, 2006, pp. 1-32.

5. Grigoryeva E.G., Klyachin V.A., Klyachin A.A. Universalnyy programmnyy kompleks dlya resheniya mnogomernykh variatsionnykh zadach [Universal Software for Slving Multidimensional Variational Problems]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2017, no. 2 (39), pp. 39-55. DOI: 10.15688/jvolsu1.2017.2.4.

6. Klyachin A.A. Postroenie triangulyatsii ploskikh oblastey metodom izmelcheniya. [The Construction of the Triangulation Plane Areas Grinding Method]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2017, no. 2 (39), pp. 18-28. DOI: 10.15688/jvolsu1.2017.2.2.

7. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey [The Delaunay Triangulation for Multidimensional Surfaces]. *Vestn. SamGU. Estestvennonauch. ser.* [Vestnik of Samara State University], 2010, vol. 78, no. 4, pp. 51-55.

8. Klyachin V.A., Shirokiy A.A. Triangulyatsiya Delone mnogomernykh poverkhnostey i ee approksimatsionnye svoystva [The Delaunay Triangulation for Multidimensional Surfaces and Its Approximative Properties]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2012, no. 1, pp. 31-39.

9. Klyachin V.A., Shurkaeva D.V. Koeffitsient izoperimetrichnosti simpleksa v zadache approksimatsii proizvodnykh [Isoperimetrical Simplex Factor in the Problem of Approximation of Derivatives]. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics], 2015, vol. 15, no. 2, pp. 151-160.

10. Latypova N.V. Pogreshnost kusochno-kubicheskoy interpolyatsii na treugolnike [The Error of Interpolation Polynomials of the Sixth Degree on a Triangle]. *Vestn. Udmurt. un-ta.*

Matematika [The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2003, pp. 3-10.

11. Matveeva Yu.V. Ob ermitovoy interpolyatsii mnogochlenami tretyey stepeni na treugolnike s ispolzovaniem smeshannykh proizvodnykh [On Hermite Interpolation by Third-Degree Polynomials on a Triangle Using Mixed Derivatives]. *Izv. Sarat. un-ta. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika* [Saratov University News. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics], 2007, vol. 7, no. 1, pp. 23-27.

12. Subbotin Yu.N. Mnogomernaya kusochno-polinomialnaya interpolyatsiya [Multidimensional Piecewise Polynomial Interpolation]. *Metody approksimatsii i interpolyatsii.* Novosibirsk, Izd-vo VTsN Publ., 1981, pp. 148-153.

13. Subbotin Yu.N. Zavisimost otsenok mnogomernoy kusochno-polinomialnoy approksimatsii ot geometricheskikh kharakteristik triangulyatsii [The Dependence of Estimates of a Multidimensional Piecewise Polynomial Approximation on the Geometric Characteristics of a Triangulation]. *Tr. MIAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 1989, vol. 189, pp. 117-137.

14. Subbotin Yu.N. Zavisimost otsenok approksimatsii interpolyatsionnymi polinomami pyatoy stepeni ot geometricheskikh kharakteristik treugolnika [Dependence of the Estimates of Approximation by Interpolation Polynomials of the Fifth Degree of the Geometrical Characteristics of the Triangle]. *Tr. IMM UrO RAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)], 1992, vol. 2, pp. 110-119.

15. Babuska I., Aziz A.K. On the Angle Condition in the Finite Element Method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1976, vol. 13, no. 2, pp. 214-226.

CONSTRUCTION OF A TRIANGULAR GRID FOR REGIONS BOUNDED BY CLOSED SIMPLE CURVES

Aleksey Aleksandrovich Klyachin

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department
of Mathematical Analysis and Function Theory,
Volgograd State University
klyachin-aa@yandex.ru, matf@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. At present, the triangulation method is widely used in many computational problems, for example, using the finite element method (FEM). The use of triangular grids in the solution of various boundary value problems is also due to the fact that derivatives of any order can be easily approximated on them with sufficient accuracy. In this case, the calculation process, as a rule, can be unified and organized so that the dependence on the grid is minimal [5]. Therefore, the claimed task is to develop algorithms for triangulation of areas that do not require much time for implementation and do not spend a large amount of computer resources. In the work [6] we have presented one such algorithm, based on the process of grinding triangulation triangles. In this paper we describe another approach to constructing a triangular grid for arbitrary planar domains and give an estimate of the minimum sine of the angle of triangles under certain geometric conditions.

Key words: triangulation, triangle, the minimum angle of triangulation, splitting area, Lipschitz condition.