DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.3

УДК 517.968
ББК 22.161

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

Турсун Камалдинович Юлдашев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики,
Сибирский государственный аэрокосмический университет
tursun.k.yuldashev@gmail.com, tursunbay@rambler.ru
просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, 660014 г. Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Рассматриваются вопросы обобщенной разрешимости смешанной задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения с псевдопараболическим оператором произвольной натуральной степени и вырожденным ядром. Применяется метод вырожденного ядра, разработанный для интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Получена система из счетных систем алгебраических уравнений. Вычислены нули главной матрицы этой счетной системы. Определены регулярные значения спектрального параметра вырожденного ядра при интегральном члене рассматриваемого уравнения. Сведена поставленная задача к счетной системе линейных интегральных уравнений, разрешимость которой доказана методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: смешанная задача, линейное интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, спектральный параметр, слабо обобщенное решение.

1. Постановка задачи

Смешанные задачи встречаются в теории упругости, фильтрации, взрыва и в решении ряда задач гидроупругости [2]. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков [1]. В работах [4–7] рассматривались дифференциальные уравнения эллиптического типа высокого порядка. Применение Метода Фурье разделения переменных для исследования классических решений смешанной задачи для линейных уравнений в частных производных обосновано в [9]. Обобщенная разрешимость смешанных задач для линейных параболических и гиперболических уравнений изучена в [3].

В прямоугольной области D рассматривается уравнение

$$\Im^n U(t,x) = \mu \int_0^T K(t,s) U(s,x)\, ds + \alpha(t) U(t,x) \tag{1}$$

с начальными

$$U(t,x)_{|\,t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} U(t,x)_{|\,t=0} = \varphi_j(x), \quad j=\overline{2,n} \tag{2}$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t,x)_{|\,x=0}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}U(t,x)_{|\,x=0}=$$

$$=U(t,x)_{|\,x=l}=U_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}U(t,x)_{|\,x=l}=0, \tag{3}$$

где $\varphi_j(x)\in C^{4mn+1}(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|\,x=0}=\varphi''_j(x)_{|\,x=0}=\ldots\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|\,x=0}=\varphi_j(x)_{|\,x=l}=$ $=\varphi''_j(x)_{|\,x=l}=\ldots=\varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|\,x=l}=0$, $j=\overline{1,n}$, $K(t,s)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C(D_T)$, $\alpha(t)\in C(D_T)$, $0<\nu$ – малый параметр, μ – действительный ненулевой спектральный параметр, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty, 0<T<\infty$, $n,m-$ фиксированные натуральные числа, $\Im^n=\left(\frac{\partial}{\partial t}+(-1)^m\nu\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\,\partial x^{2m}}+\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\,\partial x^{4m}}+\frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}}\right)^n$. Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Отметим, что в работах [11; 12] рассмотрены смешанные задачи для полулинейного дифференциального и интегро-дифференциального уравнений параболического и псевдопараболического типов высокого порядка. В этих работах не участвует спектральный параметр. Поэтому в силу общих предположений всегда обеспечивается единственность решения смешанной задачи в рассматриваемой области.

В настоящей работе рассматриваются вопросы слабо обобщенной разрешимости смешанной задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения (1) со спектральным параметром μ при вырожденном ядре $K(t, s)$. Для тех значений этого спектрального параметра, которые являются характеристическими числами ядра $K(t, s)$, единственность рассматриваемой смешанной задачи нарушается. Таких характеристических чисел спектрального параметра счетное число.

Кроме того, в отличие от [10] в правой части уравнения (1) находится неизвестная функция $U(t, x)$, зависящая от аргумента t. Эта ситуация усложнит применение не только метода вырожденного ядра при преобразовании уравнения (1), но и метода сжимающих отображений при доказательстве однозначной разрешимости поставленной задачи.

Воспользуемся методом Фурье разделения переменных, основанным на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде

$$U(t,x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\vartheta_i(x), \tag{4}$$

где функции $\vartheta_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x$ определены как собственные функции спектральной задачи $\vartheta''(x)+\lambda^2\vartheta(x)=0$, $\vartheta(0)=\vartheta(l)=0$, $0<\lambda$ и образуют полную систему ортонормированных функций $\left\{\vartheta_i(x)\right\}_{i=1}^{\infty}$ в $L_2(D_l)$, а $\lambda_i=\frac{i\pi}{l}$ – соответствующие собственные значения.

Воспользуемся следующими известными банаховыми пространствами. Рассмотрим пространство $B_2(T)$ последовательностей непрерывных функций на отрезке D_T с нормой

$$\|u(t)\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\max_{t\in D_T}|u_i(t)|\right)^2}<\infty.$$

Координатное гильбертово пространство λ_2 числовых последовательностей с нормой

$$\|\varphi\|_{\lambda_2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i|^2}<\infty.$$

Пространство $L_2(D_l)$ суммируемых с квадратом функций на отрезке D_l с нормой

$$\| \vartheta(x) \|_{L_2(D_l)} = \sqrt{\int_0^l |\vartheta(y)|^2 d y} < \infty .$$

Аналогично [3] определим понятие слабо обобщенного решения смешанной задачи (1)–(3). Обозначается через $\hat{W}_2^n(D)$ класс непрерывных функций $U(t, x)$ двух переменных в замкнутом прямоугольнике D и имеющих в нем частные производные $\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2}$, ..., $\frac{\partial^{4nm-1} U(t,x)}{\partial x^{4nm-1}}$, $\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}$, ..., $\frac{\partial^{n-1} U(t,x)}{\partial t^{n-1}}$, каждая из которых принадлежат не только $L_2(D)$, но и $L_2(D_l)$ при фиксированном $t \in D_T$ и $L_2(D_T)$ при фиксированном $x \in D_l$, где

$$L_2(D) = \left\{ U(t,x) : \sqrt{\int_0^T \int_0^l |U(t,y)|^2 d y\, d t} < \infty \right\}.$$

Определение. Функция $U(t,x) \in \hat{W}_2^n(D)$ называется слабо обобщенным решением смешанной задачи (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_0^l \left[U(t,y) \cdot \Im^n \Phi(t,y) - F\,\Phi(t,y) \right] d y\, d t =$$

$$= \int_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \Phi + n \frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2} \partial y^{4m}} \Phi + \frac{n\,(n-1)}{2} \frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-3} \partial y^{4m+2}} \Phi + \right.$$

$$+ \ \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{4nm-3}}{\partial t\, \partial y^{4nm-4}} \Phi + n \frac{\partial^{4nm-2}}{\partial y^{4nm-2}} \Phi +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^{n+2m-1}}{\partial t^{n-1} \partial y^{2m}} \Phi + n \frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-2} \partial y^{6m}} \Phi + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{n+6m-1}}{\partial t^{n-3} \partial y^{6m+2}} \Phi + \right.$$

$$\left. + \ \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{4nm+2m-3}}{\partial t\, \partial y^{4nm+2m-4}} \Phi + n \frac{\partial^{4nm+2m-2}}{\partial y^{4nm+2m-2}} \Phi \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^{n+4m-1}}{\partial t^{n-1} \partial y^{4m}} \Phi + n \frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-2} \partial y^{8m}} \Phi + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{n+8m-1}}{\partial t^{n-3} \partial y^{8m+2}} \Phi + \right.$$

$$\left.\left. + \ \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{4nm+4m-3}}{\partial t\, \partial y^{4nm+4m-4}} \Phi + n \frac{\partial^{4nm+4m-2}}{\partial y^{4nm+4m-2}} \Phi \right) \right]_{t=0} d y -$$

$$- \int_0^l \varphi_2(y) \left[\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \Phi + n \frac{\partial^{n+4m-3}}{\partial t^{n-3} \partial y^{4m}} \Phi + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-4} \partial y^{4m+2}} \Phi + \ \ldots + \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\partial^{4nm-5}}{\partial t\, \partial y^{4nm-6}} \Phi + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{4nm-4}}{\partial y^{4nm-4}} \Phi +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^{n+2m-2}}{\partial t^{n-2} \partial y^{2m}} \Phi + n \frac{\partial^{n+6m-3}}{\partial t^{n-3} \partial y^{6m}} \Phi + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{n+6m-2}}{\partial t^{n-4} \partial y^{6m+2}} \Phi + \ \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\partial^{4nm+2m-5}}{\partial t\, \partial y^{4nm+2m-6}} \Phi + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{4nm+2m-4}}{\partial y^{4nm+2m-4}} \Phi \right) +$$

$$+\left(\frac{\partial^{n+4m-2}}{\partial t^{n-2}\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{n+8m-3}}{\partial t^{n-3}\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n+8m-2}}{\partial t^{n-4}\partial y^{8m+2}}\Phi+\ \ldots\ +\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{\partial^{4nm+4m-5}}{\partial t\ \partial y^{4nm+4m-6}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4nm+4m-4}}{\partial y^{4nm+4m-4}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+$$

$$+\ \ldots-\int_0^l\varphi_{n-2}(y)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi+n\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{4m+2}}{\partial y^{4m+2}}\Phi+\right.$$

$$+\nu\left(\frac{\partial^{2m+2}}{\partial t^2\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m+1}}{\partial t\partial y^{6m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{6m+2}}{\partial y^{6m+2}}\Phi\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^{4m+2}}{\partial t^2\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m+1}}{\partial t\partial y^{8m}}\Phi+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{8m+2}}{\partial y^{8m+2}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy+$$

$$+\int_0^l\varphi_{n-1}(y)\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi+n\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi+\nu\left(\frac{\partial^{2m+1}}{\partial t\partial y^{2m}}\Phi+n\frac{\partial^{6m}}{\partial y^{6m}}\Phi\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^{4m+1}}{\partial t\partial y^{4m}}\Phi+n\frac{\partial^{8m}}{\partial y^{8m}}\Phi\right)\right]_{t=0}dy-$$

$$-\int_0^l\varphi_n(y)\left[\Phi+\nu\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi+\nu\mu\frac{\partial^{4m}}{\partial y^{4m}}\Phi\right]_{t=0}dy$$

для любой функции $\Phi\ (t,x)\in C^{\,n,4nm}(D)$, подчиненной следующим условиям:

$$\Phi(t,x)_{|\,x=0}=\Phi_{xx}(t,x)_{|\,x=0}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}\Phi\ (t,x)_{|\,x=0}=$$

$$=\Phi(t,x)_{|\,x=l}=\Phi_{xx}(t,x)_{|\,x=l}=\ldots=\frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}}\Phi(t,x)_{|\,x=l}=0,$$

$$\lim_{t\to T}\int_0^l\Phi(t,y)\,dy=\lim_{t\to T}\int_0^l\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t}dy=\ \ldots\ =\lim_{t\to T}\int_0^l\frac{\partial^{n-1}\Phi(t,y)}{\partial t^{n-1}}dy=0,$$

где

$$F\Phi(t,x)=\left[\mu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\ ds+\alpha(t)U(t,x)\right]\Phi(t,x).$$

2. Сведение решения смешанной задачи (1)–(3) к счетной системе линейных интегральных уравнений

В интегральном тождестве учтем разложение (4). Тогда с учетом вырожденности ядра из определения обобщенного решения получаем следующую счетную систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$\left[\left(1+\nu\lambda_i^{2m}+\lambda_i^{4m}\right)\frac{d}{dt}+\lambda_i^{4m}\right]^n u_i(t)=$$

$$=\mu\int_0^T\sum_{j=1}^k a_j(t)\,b_j(s)u_i(s)\,ds+\alpha(t)u_i(t). \tag{5}$$

Решая счетную систему (5) методом вариации произвольных постоянных, с помощью обозначения

$$c_{ji}=\int_0^T b_j(s)u_i(s)ds \tag{6}$$

из (5) получаем

$$u_i(t)=\left(C_{1i}+C_{2i}t+C_{3i}t^2+C_{4i}t^3+\ldots+C_{ni}t^{n-1}\right)\exp\left\{-\theta_{1i}t\right\}+$$

$$+\int_0^t\left[\mu\sum_{j=1}^k a_j(s)c_{ji}+\alpha(s)u_i(s)\right]P_i(t,s)ds\,,\quad t\in D_T\,, \tag{7}$$

где

$$P_i(t,s)=\frac{(n-1)!(t-s)^{n-1}}{\theta_{0i}^n}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}(t-s)\right\},$$

$$0<\theta_{1i}^n=\frac{\lambda_i^{4nm}}{\theta_{0i}^n}<1,\quad \theta_{0i}^n=\left(1+\nu\lambda_i^{2m}+\lambda_i^{4m}\right)^n.$$

Для определения коэффициентов $C_{ji}\ (j=\overline{1,n})$ в (7) используются начальные условия

$$u_i(0)=\varphi_{1i}\,,\ u_i'(0)=\varphi_{2i}\,,\ u_i''(0)=\varphi_{3i}\,,\ \ldots,\ \ u_i^{(n-1)}(0)=\varphi_{ni}\,.$$

Тогда из (7) получаем следующую счетную систему линейных интегральных уравнений (ССЛИУ)

$$u_i(t)=w_i(t)+\mu\sum_{j=1}^k c_{ji}\int_0^t P_i(t,s)a_j(s)ds+$$

$$+\int_0^t P_i(t,s)\alpha(s)u_i(s)ds\,, \tag{8}$$

где

$$w_i(t)=\sum_{k=1}^n\varphi_{ki}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\sum_{j=k}^n\theta_{1i}^{j-k}\ \frac{t^{j-k}}{(j-k)!}\cdot\exp\left\{-\theta_{1i}t\right\}.$$

Подстановка выражения (8) в (6) дает систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$c_{ji}+\mu\sum_{\eta=1}^k A_{j\eta i}\ c_{\eta i}=B_{ji}(u_i),\quad j=\overline{1,k}\,, \tag{9}$$

где
$$A_{j\eta i}=-\int_0^T b_j(s)\int_0^s P_i(s,\xi)a_\eta(\xi)d\xi\ ds,$$

$$B_{ji}(u_i)=\int_0^T b_j(s)\left[w_i(s)+\int_0^s P_i(s,\xi)\alpha(\xi)u_i(\xi)d\xi\right]ds\,,\quad j=\overline{1,k}\,. \tag{10}$$

СССАУ (9) однозначно разрешима при любых конечных B_{ji}, если выполняется следующее условие

$$\Delta_i(\mu)=\begin{vmatrix} 1+\mu A_{11i} & \mu A_{12i} & \ldots & \mu A_{1ki} \\ \mu A_{21i} & 1+\mu A_{22i} & \ldots & \mu A_{2ki} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu A_{k1i} & \mu A_{k2i} & \ldots & 1+\mu A_{kki} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (11)$$

Определитель Фредгольма $\Delta_i(\mu)$ в (11) есть многочлен относительно μ степени не выше k. Каждая из счетной системы уравнений $\Delta_i(\mu)=0$ имеет не более k различных корней. Эти корни являются характеристическими (собственными) числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Через Λ обозначим множество корней счетной системы алгебраических уравнений $\Delta_i(\mu)=0$. Ясно, что это множество имеет счетное число элементов. При других значениях $\mu\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)\setminus\Lambda$ условие (11) выполняется. Следовательно, для таких регулярных значений $\mu\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)\setminus\Lambda$ система (9) имеет единственное решение при любой конечной правой части.

$$c_{ji}=\frac{\Delta_{ji}(\mu,u_i)}{\Delta_i(\mu)}, \quad j=\overline{1,k}, \qquad (12)$$

где $\Delta_{ji}(\mu,u_i)=$

$$=\begin{vmatrix} 1+\mu A_{11i} & \ldots & \mu A_{1(j-1)i} & B_{1i}(u_i) & \mu A_{1(j+1)i} & \ldots & \mu A_{1ki} \\ \mu A_{21i} & \ldots & \mu A_{2(j-1)i} & B_{2i}(u_i) & \mu A_{2(j+1)i} & \ldots & \mu A_{2ki} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu A_{k1i} & \ldots & \mu A_{k(j-1)i} & B_{ki}(u_i) & \mu A_{k(j+1)i} & \ldots & 1+\mu A_{kki} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

$j=\overline{1,k}$.

Среди элементов определителей $\Delta_{ji}(\mu,u_i)$ находятся B_{ji}. В свою очередь, в составе B_{ji} находятся неизвестные функции $u_i(t)$. Подставляя (12) в (8), имеем следующую ССЛИУ

$$u_i(t)=\Im(t;u_i)\equiv w_i(t)+\mu\sum_{j=1}^{k}\frac{\Delta_{ji}(\mu,u_i)}{\Delta_i(\mu)}G_{ji}(t)+$$
$$+\int_0^t P_i(t,s)\alpha(s)u_i(s)\,ds, \qquad (14)$$

где $G_{ji}(t)=\int_0^t P_i(t,s)a_j(s)\,ds$.

3. Однозначная разрешимость ССЛИУ (14) и сходимость ряда Фурье

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1) $\|w(t)\|_{B_2(T)}=\gamma_1<\infty$; $\left\|\dfrac{1}{\Delta(\mu)}\right\|_{\lambda_2}=\beta_0<\infty$; $\|\Delta_j(\mu,\gamma_1)\|_{\lambda_2}<\infty$;

2) $\rho=\gamma_2\gamma_3\left[1+\beta_0\gamma_2|\mu|\sum_{j=1}^{k}\beta_{2j}\left\|\overline{\Delta}_j(\mu)\right\|_{B_2(T)}\right]<1$,

где

$$\overline{\Delta}_{ji}(\mu)=\begin{vmatrix} 1+\mu A_{11i} & \ldots & \mu A_{1(j-1)i} & \overline{B}_1 & \mu A_{1(j+1)i} & \ldots & \mu A_{1ki} \\ \mu A_{21i} & \ldots & \mu A_{2(j-1)i} & \overline{B}_2 & \mu A_{2(j+1)i} & \ldots & \mu A_{2ki} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu A_{k1i} & \ldots & \mu A_{k(j-1)i} & \overline{B}_k & \mu A_{k(j+1)i} & \ldots & 1+\mu A_{kki} \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

$$\overline{B}_j = \int\limits_0^T b_j(s)\,ds, \quad j = \overline{1,k}.$$

Тогда ССЛИУ (14) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$.

Доказательство. Воспользуемся методом сжимающих отображений. При этом последовательные приближения Пикара строим следующим образом:

$$\begin{cases} u_i^0(t) = w_i(t),\ t \in D_T, \\ u_i^{\tau+1}(t) = \Im(t; u_i^\tau),\ \tau = 0,1,2,3,\ldots,\ t \in D_T. \end{cases} \tag{16}$$

В силу первого условия теоремы, из (16) видно, что справедлива оценка

$$\left\| u^0(t) \right\|_{B_2(T)} = \| w(t) \|_{B_2(T)} = \gamma_1. \tag{17}$$

Для оценки по норме первой разности из (16) с помощью неравенства Гронуолла получаем оценку

$$\left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le |\mu| \sum_{j=1}^k \left\| \frac{\Delta_j(\mu, w(t))}{\Delta(\mu)} \right\|_{B_2(T)} \left\| G_j(t) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+\gamma_1 \| P(t,s) \|_{B_2(T)} \left\| \int\limits_0^t \alpha(s)\,ds \right\|_C. \tag{18}$$

В силу постановки задачи и условий теоремы справедливы оценки

$$\| P(t,s) \|_{B_2(T)} \le M \sqrt{\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\theta_{0i}^{2n}}} = \gamma_2 < \infty, \quad 0 < M = \text{const} < \infty,$$

$$\left\| \int\limits_0^t \alpha(s)\,ds \right\|_C \le \max_{t \in D_T} \int\limits_0^t |\alpha(s)|\,ds = \gamma_3 < \infty,$$

$$\left\| \frac{\Delta_j(\mu, w(t))}{\Delta(\mu)} \right\|_{B_2(T)} \le \left\| \frac{\Delta_j(\mu, \gamma_1)}{\Delta(\mu)} \right\|_{\lambda_2} \le \left\| \Delta_j(\mu, \gamma_1) \right\|_{\lambda_2} \left\| \frac{1}{\Delta(\mu)} \right\|_{\lambda_2} = \beta_{1j} < \infty,$$

$$\left\| G_j(t) \right\|_{B_2(T)} \le \| P(t,s) \|_{B_2(T)} \left\| \int\limits_0^t a_j(s)\,ds \right\|_C \le \gamma_2 \max_{t \in D_T} \int\limits_0^t |a_j(s)|\,ds = \gamma_2 \beta_{2j} < \infty.$$

Подставляя эти оценки в (18), получим

$$\left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le \gamma_2 \left[|\mu| \sum_{j=1}^k \beta_{1j}\,\beta_{2j} + \gamma_1 \gamma_3 \right]. \tag{19}$$

С учетом предыдущих оценок по норме для второй разности получим оценку

$$\left\| u^2(t) - u^1(t) \right\|_{B_2(T)} \le \beta_0 \gamma_2 |\mu| \sum_{j=1}^k \beta_{2j} \left\| \Delta_j(\mu, u^1) - \Delta_j(\mu, u^0) \right\|_{B_2(T)} +$$

$$+\gamma_2 \gamma_3 \left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)}. \tag{20}$$

Для разности $\Delta_{ji}(\mu, u^1) - \Delta_{ji}(\mu, u^0)$ из (13) с учетом (10) справедлива оценка по норме

$$\left\| \Delta_j(\mu, u^1) - \Delta_j(\mu, u^0) \right\|_{B_2(T)} \le \gamma_2 \gamma_3 \left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \left\| \overline{\Delta}_j(\mu) \right\|_{B_2(T)}, \tag{21}$$

где $\overline{\Delta}_{ji}(\mu)$ определяется из (15).

Подстановка (21) в (20) и учет (19) при этом дает

$$\left\| u^2(t) - u^1(t) \right\|_{B_2(T)} \le \rho \left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \le$$

$$\le \rho \gamma_2 \left[|\mu| \sum_{j=1}^{k} \beta_{1j} \, \beta_{2j} + \gamma_1 \gamma_3 \right] < \infty, \tag{22}$$

где $\rho = \gamma_2 \gamma_3 \left[1 + \beta_0 \gamma_2 \, |\mu| \sum_{j=1}^{k} \beta_{2j} \left\| \overline{\Delta}_j(\mu) \right\|_{B_2(T)} \right]$.

Теперь для произвольного натурального числа τ, подобно (22), получаем

$$\left\| u^{\tau+1}(t) - u^{\tau}(t) \right\|_{B_2(T)} \le \rho \left\| u^{\tau}(t) - u^{\tau-1}(t) \right\|_{B_2(T)}. \tag{23}$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (23) следует, что оператор в правой части (14) является сжимающим. Из оценок (17), (19), (22) и (23) заключаем, что для оператора в правой части (14) существует единственная неподвижная точка (см., например, [8, с. 389–401]). Следовательно, в пространстве $B_2(T)$ ССЛИУ (14) имеет единственное решение $u(t) \in B_2(T)$.

Подстановка ССЛИУ (14) в ряд Фурье (4) дает формальное решение смешанной задачи (1)–(3)

$$U(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[w_i(t) + \mu \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta_{ji}(\mu, u_i)}{\Delta_i(\mu)} G_{ji}(t) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t P_i(t,s) \alpha(s) u_i(s) \, ds \right] \cdot \vartheta_i(x). \tag{24}$$

Доказательство сходимости ряда (24) аналогично доказательству сходимости соответствующего ряда из [9; 10]. Поэтому его здесь не будем приводить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин, С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. – М. : Наука, 2006. – 248 с.

2. Александров, В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. – М. : Наука, 1986. – 336 с.

3. Ильин, В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В. А. Ильин // УМН. – 1960. – Т. 15, вып. 2 (92). – С. 97–154.

4. Похожаев, С. И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка / С. И. Похожаев // Мат. сборник. – 1982. – Т. 117, № 2. – С. 251–265.

5. Похожаев, С. И. О разрешимости некоторых квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка / С. И. Похожаев // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 100–109.

6. Скрыпник, И. В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка / И. В. Скрыпник. – Киев : Наукова думка, 1973. – 219 с.

7. Тодоров, Т. Г. О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка / Т. Г. Тодоров // Вестник ЛГУ. – 1975. – Т. 19. – С. 56–63.

8. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 495 с.

9. Чернятин, В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. – М. : Изд-во МГУ, 1991. – 112 с.

10. Юлдашев, Т. К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. – 2017. – № 1 (38). – С. 42–54.

11. Юлдашев, Т. К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени / Т. К. Юлдашев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 1. – С. 112–123.

12. Юлдашев, Т. К. Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени / Т. К. Юлдашев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 2. – С. 277–295.

REFERENCES

1. Algazin S.D., Kiyko I.A. *Flatter plastin i obolochek* [Flutter of Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 2006. 248 p.

2. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems of Continuum Mechanics with Mixed Boundary Conditions]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 336 p.

3. Ilyin V.A. O razreshimosti smeshannykh zadach dlya giperbolicheskikh i parabolicheskih uravneniy [On Solvability of Mixed Problems for Hyperbolic and Parabolic Equations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1960, vol. 15, no. 2 (92), pp. 97-154.

4. Pokhozhaev S.I. O razreshimosti kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy proizvolnogo poryadka [On the Solvability of Quasilinear Elliptic Equations of Arbitrary Order]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1982, vol. 117, no. 2, pp. 251-265.

5. Pokhozhaev S.I. O razreshimosti nekotorykh kvazilineynykh ellipticheskih uravneniy vysokogo poryadka [On the Solvability of Some Quasilinear Elliptic Equations of Higher Order]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18, no. 1, pp. 100-109.

6. Skrypnik I.V. *Nelineynye ellipticheskie uravneniya vysshego poryadka* [Nonlinear Elliptic Equation of Higher Order]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1973. 219 p.

7. Todorov T.G. O nepreryvnosti ogranichennykh obobshennykh resheniy kvazilineynykh ellipticheskih uravneniy vysokogo poryadka [On the Continuity of Generalized Bounded Solutions of Quasi-Linear Elliptic Equations of High Order]. *Vestnik Leningradskogo universiteta*, 1975, vol. 19, pp. 56-63.

8. Trenogin V.A. *Funktsionalnyy analiz* [Functional Analisis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 495 p.

9. Chernyatin V.A. *Obosnovanie metoda Furye v smeshannoy zadache dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Justification of Fourier Method in Mixed Problem for Partial Equations]. Moscow, Moscow State University Publ., 1991. 112 p.

10. Yuldashev T.K. Nelokalnaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo psevdoparabolicheskogo integro-differentsialnogo uravneniya s vyrozhdennym yadrom [Nonlocal Boundary Value Problem for a Nonhomogeneous Pseodoparabolic Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Vestnik of Volgograd state university. Mathematics. Physics], 2017. no. 1 (38), pp. 42-54.

11. Yuldashev T.K. Mixed Value Problem for Nonlinear Integro-Differential Equation with Parabolic Operator of Higher Power. *Comput. mathematics and math. physics*, 2012, vol. 52, no. 1, pp. 112-123.

12. Yuldashev T.K. Smeshannaya zadacha dlya nelineynogo uravneniya s psevdoparabolicheskim operatorom vysokoy stepeni [A Mixed Problem for a Nonlinear Equation with Pseudoparabolic Operator of High Degree]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika* [Vestnik of Voronezh state university. Physics. Mathematics], 2013, no. 2, pp. 277-295.

GENERALIZED SOLUTION OF MIXED VALUE PROBLEM FOR A LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH PSEUDOPARABOLIC OPERATOR OF HIGHER POWER

Tursun Kamaldinovich Yuldashev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Higher Mathematics,
Siberian State Aerospace University
tursun.k.yuldashev@gmail.com, tursunbay@rambler.ru
Prosp. im. gazety Krasnoyarskiy rabochiy, 31, 660014 Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. Mathematical modeling of many processes occurring in the real world leads to the study of initial and boundary value problems for equations of mathematical physics. Mixed value problems for partial differential and integro-differential equations by virtue of their importance in the application are one of the most important parts of the theory of differential equations.

We propose a method of studying the one-value generalized solvability of the mixed value problem for a linear higher-order pseudoparabolic type of integro-differential equation with degenerate kernel. Integro-differential equations of such type model many natural phenomena and appear in many fields of sciences. For this reason, this type of equations was given a great importance in the works of many researchers.

In this article in rectangular domain D we consider the questions of solvability and constructing the generalized solution of mixed value problem for a linear integro-differential equation with pseudoparabolic operator of higher power and degenerate kernel

$$\Im^n U(t,x) = \mu \int_0^T K(t,s) U(s,x)\, ds + \alpha(t) U(t,x) \tag{1}$$

with initial

$$U(t,x)_{|t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^{j-1}}{\partial t^{j-1}} U(t,x)_{|t=0} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{2,n} \tag{2}$$

and Benar-type boundary value conditions

$$U(t,x)_{|x=0} = U_{xx}(t,x)_{|x=0} = \ldots = \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}} U(t,x)_{|x=0} =$$

$$= U(t,x)_{|x=l} = U_{xx}(t,x)_{|x=l} = \ldots = \frac{\partial^{2(2nm-1)}}{\partial x^{2(2nm-1)}} U(t,x)_{|x=l} = 0, \tag{3}$$

where $f(x,u) \in C(D_l \times R)$, $\varphi_j(x) \in C^{4mn+1}(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0} = \varphi_j''(x)_{|x=0} = \ldots = \varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=0} = \varphi_j(x)_{|x=l} = \varphi_j''(x)_{|x=l} = \ldots = \varphi_j^{(4nm-2)}(x)_{|x=l} = 0$, $j = \overline{1,n}$,

$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t), b_i(s) \in C^n(D_T)$, $\alpha(t) \in C^n(D_T)$, $0 < \nu$ is small parameter, μ is real spectral parameter, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0,T]$, $D_l \equiv [0,l]$, $0 < l < \infty, 0 < T < \infty$, n and m are fixed natural numbers and $\Im^n = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^m \nu \frac{\partial^{2m+1}}{\partial t \partial x^{2m}} + \frac{\partial^{4m+1}}{\partial t \partial x^{4m}} + \frac{\partial^{4m}}{\partial x^{4m}} \right)^n$.

Here we suppose that the functions $a_i(t)$ and $b_i(s)$ are linear independent.

We use the method of Fourier series based on separation of variables. Application of this method of separation of variables can improve the quality of formulation of the considering mixed value problem and facilitates the processing procedure. With the introduction of the notation we obtained the system of countable system of algebraic equations. From the condition of non-degenerate of Fredholm determinant we calculate the regular values of parameter ν. Solving this algebraic system for these regular values of parameter ν we can reduce consideration of the mixed value problem to the countable system of linear integral equation, one-value solvability of which is proved by the method of successive approximation. The criterion of one-value solvability of the considered problem is established. Under this criterion we prove the theorems of one-valued generalized solvability of the mixed value problems. Every estimate was obtained by the aid of the Hölder inequality and Minkovski inequality. This paper advances the theory of partial integro-differential equations with degenerate kernel.

Key words: mixed value problem, linear integro-differential equation, degenerate kernel, spectral parameter, slightly generalized solvability.