DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.2

УДК 517.9
ББК 22.161

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЯЕМОГО НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ [1]

Александр Николаевич Шелковой

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики
и физико-математического моделирования,
Воронежский государственный технический университет
shelkovoj.aleksandr@mail.ru
просп. Московский, 14, 394026 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями методом подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра и сходимости спектральных разложений дифференциального оператора.

Ключевые слова: собственные значения, спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

Введение. Основные понятия метода подобных операторов

Пусть $L_2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля и со скалярным произведением вида

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau.$$

Через $W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{x \in L_2[0, 2\pi] : x'$ — абсолютно непрерывна, $x'' \in L_2[0, 2\pi]\}$. Рассматривается дифференциальный оператор $\mathcal{L}\colon D(\mathcal{L}) \subset \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, задаваемый дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}x)(t) = -\ddot{x}(t) + x(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k(t)\dot{x}(t_k), \tag{1}$$

где a_k, $1 \le k \le N$ — функции из $L_2[0, 2\pi]$, $t_k \in [0, 2\pi]$, $k = \overline{1, N}$ с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0, 2\pi],\ x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)\}$ (то есть оператор определяется периодическими краевыми условиями).

В частности, операторы такого класса (случай $N = 2$) возникают при переходе к сопряженному при исследовании действующего в $L_2[0, 2\pi]$ оператора, задаваемого дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}y = -\ddot{y} + y \tag{2}$$

и нелокальными краевыми условиями:

$$y(0) = y(2\pi) + \int_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt,\ \dot{y}(0) = \dot{y}(2\pi) + \int_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt. \tag{3}$$

Здесь a_0 и a_1 — функции из $L_2[0, 2\pi]$.

Отметим, что интерес к исследованию дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями был проявлен давно. В работе [16] для обыкновенных операторов с интегральными краевыми условиями рассматривались вопросы базисности собственных функций. Вопрос о базисности Рисса собственных и присоединенных функций интегро-дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями изучался в работе [5]. В [9] приведены результаты исследования нелокальных начально-краевых задач с интегральными нелокальными условиями для одномерных уравнений колебания среды и построены их решения. Для дифференциального оператора с нерегулярными граничными условиями в работе [13] получены достаточные условия существования резольвенты, а также оценка ее поведения в пространстве L_p при любом $p \ge 1$. В [12] доказана однозначная разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями I рода, если ядра этих условий зависят не только от пространственной переменной, но и от времени. Нелокальная краевая задача для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами рассматривалась в работе [8]. В [17] обсуждались вопросы однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка. Вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной краевой задачи для трехмерного неоднородного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка с вырожденным ядром исследуются в [18]. Для исследования операторов с нелокальными краевыми условиями в работах А.Г. Баскакова, Т.К. Кацаран [5], Е.Л. Ульяновой [14] стал применяться метод подобных операторов.

Основные результаты статьи (теорема 3) связаны с изучением спектральных свойств оператора $\mathcal{L}$, заданного формулами (2), (3). Для исследования спектра оператора $\mathcal{L}$ используется сопряженный ему оператор $\mathcal{L}^*$ (см. [5]), который задается дифференциальным выражением

$$(\mathcal{L}^*x)(t) = -\ddot{x}(t) + x(t) - [\dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t)] \tag{4}$$

и краевыми условиями $x(0) = x(2\pi)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.

В настоящей статье для исследования спектральных свойств оператора $\mathcal{L}$ применяется вариант метода подобных операторов, адаптированный для операторов рассматриваемого класса и позволяющий получить оценку сходимости спектральных разложений рассматриваемых операторов. В изложении метода подобных операторов будем придерживаться аксиоматического подхода, как в работах [2; 3; 5–7], опираясь в основном на работу [3]. Отметим также работы [4; 14; 15], в которых с помощью метода подобных операторов исследуются спектральные характеристики различных операторов.

Пусть H — бесконечномерное комплексное сепарабельное гильбертово пространство, а $End\ H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H, $\|X\|_\infty = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Xx\|$ — норма оператора в $End\ H$.

Определение 1 ([6]). *Два оператора $A_i\colon D(A_i) \subset H \to H$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in End\ H$ ($U^{-1} \in End\ H$), такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и выполняется равенство $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется оператором преобразования подобия оператора A_1 в A_2.*

Определение 2 ([3]). *Линейный оператор $C\colon D(C) \subset H \to H$ называется подчиненным оператору $A\colon D(A) \subset H \to H$, то есть $C \in \mathcal{L}_A(H)$, если выполнены следующие два условия:*

1) *$D(C) \supseteq D(A)$;*
2) *существует постоянная $M > 0$, такая, что конечна величина*

$$\|C\|_A = \inf\{M : \|Cx\| \le M(\|Ax\| + \|x\|),\ x \in D(A)\},$$

принимаемая за норму в $\mathcal{L}_A(H)$.

Определяющим понятием метода подобных операторов является понятие допустимой тройки для невозмущенного оператора A.

Определение 3 ([3]). *Тройка $(\mathcal{U}, J, \Gamma)$, $J\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $\Gamma\colon \mathcal{U} \to End\ H$, называется допустимой для оператора A, а $\mathcal{U}$ — допустимым пространством возмущений, если:*

1) *$\mathcal{U}$ — банахово пространство (со своей нормой $\|\cdot\|_*$), непрерывно вложенное в банахово пространство $\mathcal{L}_A(H)$, то есть существует постоянная $M_0 > 0$, такая, что $\|B\|_A \le M_0\|B\|_*$ для любого оператора $B \in \mathcal{U}$;*
2) *J, Γ — трансформаторы (то есть линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов);*
3) *$(\Gamma X)x \in D(A)$ для любых $x \in D(A)$ и имеет место равенство:*

$$A\Gamma X - (\Gamma X)A = X - JX,\ X \in \mathcal{U}$$

(равенство понимается как равенство элементов из $\mathcal{U}$);

4) *$X\Gamma Y$, $(\Gamma Y)X \in \mathcal{U}$, $X, Y \in \mathcal{U}$, и существуют постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, такие, что $\|\Gamma\| \le \gamma_1$ и $\max\{\|X\Gamma Y\|_*, \|(\Gamma Y)X\|_*\} \le \gamma_2\|X\|_*\|Y\|_*$;*
5) *выполнено одно из условий:*
   a) *$\operatorname{Im}\Gamma X \subset D(A)$, где $\operatorname{Im}\Gamma X$ — образ оператора ΓX, и $A\Gamma X \in End\ H$;*
   b) *для любого $X \in \mathcal{U}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\nu_\varepsilon \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A), такое, что $\|XR(\nu_\varepsilon, A)\|_\infty < \varepsilon$, $R(\nu_\varepsilon, A) = (A - \nu_\varepsilon I)^{-1}$, где I — тождественный оператор.*

Пусть $A\colon D(A) \subset H \to H$ — нормальный оператор (см., например, [11, гл. 10, с. 39]) (частный случай нормального — самосопряженный оператор), то есть $D(A) =$

$= D(A^*)$, $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $x \in D(A)$, спектр которого представим в виде: $\sigma(A) = \bigcup\limits_{j\geq 1} \sigma_j$, $0 \notin \sigma(A)$, где σ_j, $j \geq 1$ — взаимно непересекающиеся компактные множества, такие, что $\mathrm{dist}(0,\sigma_1) < \mathrm{dist}(0,\sigma_2) < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{dist}(0,\sigma_n) = \infty$. Обозначим P_j, $j \geq 1$, — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_j, $A_j = AP_j$, $j = 1,2,\ldots$, $A_j \in End\ H, |\sigma_j| = \sup\limits_{\lambda\in\sigma_j} |\lambda|$. Введем двусторонний идеал $\sigma_2(H)$ операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H, из алгебры $End\ H$ с нормой $\|\cdot\|_2$) (см. [10, гл. 3, § 9]). В качестве пространства возмущений $\mathcal{U}$ рассматривается оператор $B\colon D(A) \subset H \to H$, допускающий представление $B = B_0A$, $B_0 \in \sigma_2(H)$, причем существуют две ненулевые последовательности $\{\alpha_i\}_1^\infty, \{\beta_j\}_1^\infty$, такие, что имеют место оценки: $\|P_iB_0P_j\| \leq c\cdot\alpha_i\cdot\beta_j$, $i,j = 1,2,\ldots$, для некоторой постоянной $c > 0$. Наименьшая из констант, удовлетворяющих этому неравенству, определяет норму в $\mathcal{U}$. Пусть n — некоторое натуральное число, положим $\Delta_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \sigma_k$, $P(\Delta_n, A)$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству Δ_n. Обозначим $Q_1 = Q_{1n} = P(\Delta_n, A) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, $Q_2 = Q_{2n} = I - Q_{1n}$. Трансформаторы $J_n\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $\Gamma_n\colon \mathcal{U} \to \sigma_2(H)$, $n \geq 1$, определяются следующим образом: $J_nX = Q_1XQ_1 + Q_2XQ_2$, $\Gamma_nX = \Gamma_n^{(1)}X + \Gamma_n^{(2)}X$, где

$$\Gamma_n^{(1)}X = \sum_{m\geq n+1}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_n(P_mX_0AP_k), \quad \Gamma_n^{(2)}X = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k\geq n+1}\Gamma_n(P_mX_0AP_k).$$

На операторных блоках $P_mX_0P_kA$ трансформатор Γ_n определяется как решение уравнения $AP_mY_{0mk} - Y_{0mk}AP_k = P_mX_0P_k$, удовлетворяющее условию $P_mY_{0mk}P_k = Y_{0mk}$, где $k \geq n+1$, $m \leq n$ либо $k \leq n$, $m \geq n+1$. Для всех остальных значений m и k полагается $\Gamma_n(P_mX_0P_kA) = 0$.

Основные результаты статьи получены с использованием следующих утверждений.

Теорема 1 ([15]). *Пусть n — натуральное число, такое, что*

$$\gamma_1(n) = \left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{k\geq n+1}\frac{|\sigma_k|^2\beta_k^2\alpha_m^2 + \beta_m^2\alpha_k^2|\sigma_m|^2}{(dist(\sigma_m,\sigma_k))^2}\right)^{1/2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max\left\{\max_{j\leq n}\left\{\sum_{k\geq n+1}\frac{|\sigma_k|\alpha_k\beta_k}{dist(\sigma_j,\sigma_k)}\right\}, \sup_{j\geq n+1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{|\sigma_k|\alpha_k\beta_k}{dist(\sigma_j,\sigma_k)}\right\}\right\} < \infty,$$

причем выполнено условие: $2\max\{\gamma_1(n),\gamma_2(n)\} + \gamma_1(n) + \gamma_2(n) < 1$. *Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_nX^*(n)$, где $X^*(n) \in \mathcal{U}$ имеет вид:*

$$X^*(n) = X_{11}^*(n) + X_{12}^*(n) + X_{21}^*(n) + X_{22}^*(n); \tag{5}$$

$X_{ij}^*(n) = Q_iX^*(n)Q_j$, $i,j = 1,2$, *есть решение системы уравнений*

$$\begin{cases} X_{ii} = B_{ij}\Gamma X_{ji} + B_{ii},\ (i=1, j=2) \vee (i=2, j=1); \\ X_{ij} = F_{ij}(X_{ij}); \end{cases}$$

оператор $F_{ij}\colon \mathcal{U}_{ij} \to \mathcal{U}_{ij}$ задается формулой

$$F_{ij}(X) = B_{ii}\Gamma X - (\Gamma X)B_{jj} - (\Gamma X)(B_{ji}\Gamma X) + B_{ij},$$

и $B_{ij} = Q_iBQ_j,\ i,j = 1,2,$ *— блоки оператора* $B \in \mathcal{U}$*, являющегося возмущением оператора* A*; допустимое пространство возмущений* $\mathcal{U}$ *является прямой суммой четырех замкнутых подпространств вида* $\mathcal{U}_{ij} = \{Q_iXQ_j,\ X \in \mathcal{U}\},\ i,j = 1,2.$ *Оператор преобразования подобия имеет вид* $I + \Gamma_nX^*(n)$*.*

Теорема 2 ([15]). *Пусть операторы* A *и* $B \in \mathcal{U}$ *таковы, что* $\gamma_1(n) \to 0,\ \gamma_2(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда, начиная с некоторого* n_0*, оператор* $A - B$ *подобен оператору* $A - J_nX^*(n)$*,* $n \geq n_0$*, где* $X^*(n)$ *представимо в виде (5) и*

$$\|P(\Delta_n, A) - P(\widetilde{\Delta}_n, A - B)\| \to 0$$

при $n \to \infty$*, причем* $\widetilde{\Delta}_n = \sigma((A - J_nX^*(n)) \mid P(\Delta_n, A)H) \subset \sigma(A - B)$*, где* $P(\widetilde{\Delta}_n, A - B)$ *— проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* $\widetilde{\Delta}_n$ *оператора* $A - B$*.*

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда*

$$\|(I - P(\widetilde{\Delta}_n, A - B))x - \sum_{i \geq n+1} P_ix\| \longrightarrow 0,$$

при $n \to \infty$ *и для любого фиксированного* $x \in H$*.*

1. Основные результаты

Перейдем к исследованию спектральных свойств оператора $\mathcal{L}\colon D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$, задаваемого выражением (2). Поскольку спектры оператора $\mathcal{L}$ и сопряженного ему оператора $\mathcal{L}^*$ совпадают, то для получения асимптотики собственных значений оператора $\mathcal{L}$ достаточно рассмотреть только оператор $\mathcal{L}^*$. Для исследования спектральных свойств сопряженного оператора (4) представим его в виде $\mathcal{L}^*x = Ax - Bx$. Оператор A будем считать невозмущенным оператором, оператор B — возмущением. Здесь оператор A порождается дифференциальным выражением $Ax = -\ddot{x} + x$ с областью определения

$$D(A) = \{x \in L_2[0,2\pi] : x,\ \dot{x} \in C[0,2\pi],\ \ddot{x} \in L_2[0,2\pi], x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)\}$$

и

$$(Bx)(t) = \dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t),\ t \in [0,2\pi],\ x \in D(A). \tag{6}$$

Оператор A — самосопряженный оператор с дискретным спектром, собственное значение которого $\lambda_0 = 1$ является простым, а остальные собственные значения $\lambda_n = n^2 + 1, n \geq 1$, двукратны; собственные функции оператора A, отвечающие этим собственным значениям, $e_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_{2n-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt$, $e_{2n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt$, $n \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0,2\pi]$ (см., например, [2, с. 50]). Положим $\Delta_1(n) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $P_n = P(\Delta_1(n), A)$, $P_j = P(\lambda_j, A)$, $j = 1,2,\ldots$, — проектор Рисса, построенный по одноточечному множеству $\sigma_j = \{j^2+1\}$, $P_jx = (x, e_{2j-1})e_{2j-1} + (x, e_{2j})e_{2j}$, $j \neq 0$, $(\cdot\ ,\ \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[0,2\pi]$. Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $A - B$, мы получим основные результаты статьи.

В следующей лемме получены оценки на последовательности $\|P_iB_0P_j\|$, $i,j = 0,1,2,\ldots$, участвующие в формулировке теоремы 1.

Лемма 1. *Оператор* $B\colon D(A) \subset L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$, *задаваемый соотношением (6), представим в виде* $B = B_0 A$, *где* $B_0 \in \sigma_2(L_2[0,2\pi])$ ($\sigma_2(L_2[0,2\pi])$ — *идеал операторов Гильберта — Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве* $L_2[0,2\pi]$), *и имеют место оценки*

$$\|P_i B_0 P_j\| \le \alpha_i \beta_j, \ i,j = 0,1,2,\dots, \tag{7}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_j = \frac{j}{j^2+1}$, $j = 1,2,\dots$; *если в неравенстве (7)* $i = 0$ *и* $j = 1,2,\dots$, *то* $\alpha_0 = \sqrt{\frac{|a_0^0|^2+|a_1^0|^2}{2}}, a_0^0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} a_0(t)dt$, $a_1^0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} a_1(t)dt$; *если в (7)* $i = 0$ *и* $j = 0$, *то* $\alpha_0 = \frac{|a_1^0|}{2}$,

$$\alpha_i = \sqrt{|a_{0i}^{\sin}|^2 + |a_{0i}^{\cos}|^2 + |a_{1i}^{\sin}|^2 + |a_{1i}^{\cos}|^2},$$

где $a_{0i}^{\sin} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} a_0(t)\sin itdt$, $a_{0i}^{\cos} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} a_0(t)\cos itdt$, $a_{1i}^{\sin} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} a_1(t)\sin itdt$ *и* $a_{1i}^{\cos} =$ $= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} a_1(t)\cos itdt$, $i = 1,2,\dots$.

Теорема 3. *Пусть для функций* a_0 *и* a_1 *ограниченной вариации на отрезке* $[0,2\pi]$ *и для последовательностей* $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, *определенных формулами*

$$\gamma_1(n) = \left(\frac{\alpha_0^2\beta_n^2(n^2+1)^2 + \alpha_n^2\beta_0^2}{n^4} + \sum_{\substack{m\ge1\\ m\ne n}} \frac{\alpha_m^2\beta_n^2(n^2+1)^2 + \alpha_n^2\beta_m^2(m^2+1)^2}{|n^2-m^2|^2}\right)^{1/2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = \max\left\{\frac{\alpha_n\beta_n(n^2+1)}{2n-1}; \frac{\alpha_0\beta_0}{n^2} + \sum_{\substack{m\ge1\\ m\ne n}} \frac{\alpha_m\beta_m(m^2+1)}{|n^2-m^2|}\right\} < \infty,$$

выполнены условия: $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_1(n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_2(n) = 0$. *Тогда спектр* $\sigma(A-B)$ *оператора* $A - B$ *представим в виде* $\sigma(A-B) = \bigcup\limits_{n\ge1} \widetilde{\sigma}_n$, *где* $\widetilde{\sigma}_n$, $n \ge 1$, — *не более чем двухточечное множество. При этом имеют место оценки:*

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1) \ + \ \frac{(-1)^n}{2}\right| \ \le \ c \cdot \frac{\ln n}{n},$$

где $\widetilde{\lambda}_n$ — *взвешенное среднее собственных значений из* $\widetilde{\sigma}_n$.

Также для $n \ge 1$ *справедливы оценки:*

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|(\widetilde{P}_n x)(t) - \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt\right)\cos nt - \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin ntdt\right)\sin nt\right|^2 dt\right)^{1/2} \le c(n)\gamma_1(n),$$

для некоторой последовательности $c > 0$, *где* $\lim\limits_{n\to\infty} c(n) = 1$. *Здесь* $\widetilde{P}_n$ — *проектор Рисса, построенный по спектральному множеству* $\widetilde{\sigma}_n$ *оператора* $A - B$.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство леммы 1. Покажем, что оператор B представим в виде $Bx = B_0Ax$. Действительно, $Bx = BIx = BA^{-1}Ax = B_0Ax$, где $B_0 = BA^{-1}$.
Докажем, что $\|P_0B_0P_j\|_2 \leq \alpha_0\beta_j,\ j = 1, 2, \ldots$. Имеют место равенства:

$$P_0B_0P_jx = (B_0P_jx, e_0)e_0 = (B_0(x, e_{2j-1})e_{2j-1}, e_0)e_0 + (B_0(x, e_{2j})e_{2j}, e_0)e_0 =$$

$$= (x, e_{2j-1})(B_0e_{2j-1}, e_0)e_0 + (x, e_{2j})(B_0e_{2j}, e_0)e_0 =$$

$$= (x, e_{2j-1})(BA^{-1}e_{2j-1}, e_0)e_0 + (x, e_{2j})(BA^{-1}e_{2j}, e_0)e_0 =$$

$$= (x, e_{2j-1})(B\frac{1}{\lambda_j}e_{2j-1}, e_0)e_0 + (x, e_{2j})(B\frac{1}{\lambda_j}e_{2j}, e_0)e_0 =$$

$$= \frac{1}{\lambda_j}[(x, e_{2j-1})(Be_{2j-1}, e_0)e_0 + (x, e_{2j})(Be_{2j}, e_0)e_0].$$

Следовательно,

$$\|P_0B_0P_j\| \leq \frac{\sqrt{|(Be_{2j-1}, e_0)|^2 + |(Be_{2j}, e_0)|^2}}{\lambda_j} = \frac{j}{\lambda_j} \cdot \frac{\sqrt{|(Be_{2j-1}, e_0)|^2 + |(Be_{2j}, e_0)|^2}}{j}.$$

Ясно, что последовательность $\beta_j = \frac{j}{j^2+1},\ j \geq 1$, принадлежит l_2. Верны следующие равенства:

$$(Be_{2j-1}, e_0) = \int\limits_0^{2\pi} [\dot{e}_{2j-1}(2\pi)a_0(t) - e_{2j-1}(2\pi)a_1(t)]e_0(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{j}{\sqrt{\pi}}\sin 2\pi j a_0(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2\pi j a_1(t)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt = \frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{2\pi} a_1(t)dt = \frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{2}}a_1^0.$$

Аналогично получим, что $(Be_{2j}, e_0) = \frac{(-1)^j j}{\sqrt{2}}a_0^0,\ j \geq 1$.
Тогда

$$\sup_{j\geq 1}\frac{\sqrt{\left|\frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{2}}a_1^0\right|^2 + \left|\frac{(-1)^j j}{\sqrt{2}}a_0^0\right|^2}}{j} = \sup_{j\geq 1}\sqrt{\frac{|a_1^0|^2}{2j^2} + \frac{j^2|a_0^0|^2}{2j^2}} = \sqrt{\frac{|a_0^0|^2 + |a_1^0|^2}{2}} = \alpha_0.$$

Докажем, что $\|P_iB_0P_0\| \leq \alpha_i\beta_0,\ i = 1, 2, \ldots$.
Выполняя для $P_iB_0P_0x$ преобразования, аналогичные преобразованиям для $P_0B_0P_jx$, получим:

$$P_iB_0P_0x = \frac{1}{\lambda_0}(x, e_0)[(Be_0, e_{2i-1})e_{2i-1} + (Be_0, e_{2i})e_{2i}] =$$

$$= (x, e_0)[(Be_0, e_{2i-1})e_{2i-1} + (Be_0, e_{2i})e_{2i}].$$

В этом случае $\|P_iB_0P_0\| \leq \sqrt{|(Be_0, e_{2i-1})|^2 + |(Be_0, e_{2i})|^2},\ i = 1, 2, \ldots$. Вычисляя значения входящих в эту оценку скалярных произведений, получим, что

$$\beta_0 = 1;\ \alpha_i = \sqrt{\frac{|a_{1i}^{\sin}|^2 + |a_{1i}^{\cos}|^2}{2}}.$$

Аналогично доказывается, что $\|P_0 B_0 P_0\| \le \alpha_0 \beta_0$. Здесь $\alpha_0 = \frac{|a_1^0|}{2}$; $\beta_0 = 1$.
Покажем, что $\|P_i B_0 P_j\| \le \alpha_i \beta_j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, для введенных последовательностей α_i, β_j. Далее используются равенства:

$$P_i B_0 P_j x = (B_0 P_j x, e_{2i-1}) e_{2i-1} + (B_0 P_j x, e_{2i}) e_{2i} = (B_0[(x, e_{2j-1}) e_{2j-1} +$$

$$+ (x, e_{2j}) e_{2j}], e_{2i-1}) e_{2i-1} + (B_0[(x, e_{2j-1}) e_{2j-1} + (x, e_{2j}) e_{2j}], e_{2i}) e_{2i} =$$
$$= (x, e_{2j-1})(B_0 e_{2j-1}, e_{2i-1}) e_{2i-1} + (x, e_{2j})(B_0 e_{2j}, e_{2i-1}) e_{2i-1} +$$
$$+ (x, e_{2j-1})(B_0 e_{2j-1}, e_{2i}) e_{2i} + (x, e_{2j})(B_0 e_{2j}, e_{2i}) e_{2i} =$$
$$= [(x, e_{2j-1})(B_0 e_{2j-1}, e_{2i-1}) + (x, e_{2j})(B_0 e_{2j}, e_{2i-1})] e_{2i-1} +$$
$$+ [(x, e_{2j-1})(B_0 e_{2j-1}, e_{2i}) + (x, e_{2j})(B_0 e_{2j}, e_{2i})] e_{2i}.$$

Выполняя дальнейшие преобразования, аналогичные преобразованиям для $P_0 B_0 P_j x$, получим, что

$$\|P_i B_0 P_j\|_2 \le \frac{j}{\lambda_j} \cdot \frac{\sqrt{|(Be_{2j-1}, e_{2i-1})|^2 + |(Be_{2j}, e_{2i-1})|^2 + |(Be_{2j-1}, e_{2i})|^2 + |(Be_{2j}, e_{2i})|^2}}{j}.$$

Последовательность $\{\beta_j\} = \left\{\frac{j}{j^2+1}\right\}$ принадлежит l_2. Докажем, что и последовательность $\{\alpha_i\}$ также суммируема с квадратом.
Скалярные произведения, участвующие в оценках, находятся аналогично, и они представимы в виде:

$$(Be_{2j-1}, e_{2i-1}) = (-1)^{j+1} a_{1i}^{\cos};\ (Be_{2j}, e_{2i-1}) = (-1)^j j a_{0i}^{\cos};$$

$$(Be_{2j-1}, e_{2i}) = (-1)^{j+1} a_{1i}^{\sin};\ (Be_{2j}, e_{2i}) = (-1)^j j a_{0i}^{\sin}.$$

Следовательно, имеют представление последовательности $\{\alpha_i\}$:

$$\alpha_i = \sup_{j \ge 1} \sqrt{\frac{|a_{1i}^{\cos}|^2}{j^2} + |a_{0i}^{\cos}|^2 + \frac{|a_{1i}^{\sin}|^2}{j^2} + |a_{0i}^{\cos}|^2} = \sqrt{|a_{0i}^{\sin}|^2 + |a_{0i}^{\cos}|^2 + |a_{1i}^{\sin}|^2 + |a_{1i}^{\cos}|^2}.$$

Числа a_0^0, $a_{0i}^{\sin}$, $a_{0i}^{\cos}$ являются коэффициентами Фурье для функции a_0, а числа a_1^0, $a_{1i}^{\sin}$, $a_{1i}^{\cos}$ — коэффициентами Фурье для функции a_1 по системе $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$ собственных функций оператора A, следовательно, $\{\alpha_i\} \in l_2$, то есть оператор B_0 — оператор Гильберта — Шмидта. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Как показано в работах [14; 15, следствие 2.1.1 из теоремы 2.1.1, с. 59], если спектральное множество $\sigma_n = \{\lambda_n\}$ состоит из одного собственного значения кратности k, то

$$\left| \widetilde{\lambda}_n - \lambda_n + \frac{1}{k} \operatorname{tr}(B_{11} + B_{12} \Gamma_n B_{21}) \right| \le \lambda_n \gamma_2(n) \alpha_n \beta_n / \sqrt{D(n)}, \tag{8}$$

где $D(n) = (1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n))^2 - 4\gamma_1(n)\gamma_2(n)$. В нашем случае $k=2$, $\lambda_n = n^2+1$ и

$$\alpha_n = (|a_{0n}^{\sin}|^2 + |a_{0n}^{\cos}|^2 + |a_{1n}^{\sin}|^2 + |a_{1n}^{\cos}|^2)^{1/2}, \quad \beta_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем считать, что функции a_0 и a_1 являются функциями ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$. Как известно (см., например, [1, с. 81]), для любой функции ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$ коэффициенты Фурье $a_n = O(\frac{1}{n})$, $b_n = O(\frac{1}{n})$. Тогда $\alpha_n = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{n}$. Преобразуя левую часть выражения (8), получим равенства:

$$\operatorname{tr}(B_{11} + B_{12}\Gamma_n B_{21}) = \operatorname{tr} B_{11} + \operatorname{tr}(B_{12}\Gamma_n B_{21}).$$

$$\operatorname{tr} B_{11} = (B_{11}e_{2n-1}, e_{2n-1}) + (B_{11}e_{2n}, e_{2n}) = (P_1BP_1e_{2n-1}, e_{2n-1}) + (P_1BP_1e_{2n}, e_{2n}) =$$
$$= (Be_{2n-1}, e_{2n-1}) + (Be_{2n}, e_{2n}).$$

$$\operatorname{tr}(B_{12}\Gamma_n B_{21}) = (B_{12}\Gamma_n B_{21}e_{2n-1}, e_{2n-1}) + (B_{12}\Gamma_n B_{21}e_{2n}, e_{2n}) =$$
$$= (P_1BP_2\Gamma_n P_2BP_1e_{2n-1}, e_{2n-1}) + (P_1BP_2\Gamma_n P_2BP_1e_{2n}, e_{2n}) =$$
$$= (BP_2\Gamma_n P_2Be_{2n-1}, e_{2n-1}) + (BP_2\Gamma_n P_2Be_{2n}, e_{2n}).$$

Здесь $P_1 = P_{1n}$ — проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, $P_2 = P_{2n} = I - P_{1n}$. Поскольку $\Gamma_n P_2 X = P_1P_2XS_n - S_nP_2XP_1 = -S_nXP_1 = -S_nP_1X$, где $S_n \in End\ H$ определяется на векторах $e_k, k \geq 1$, соотношениями

$$S_ne_n = 0, S_ne_k = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k}e_k, \ k \neq n,$$

то имеют место равенства:

$$\operatorname{tr}(B_{12}\Gamma_n B_{21}) = -(BP_2S_nP_1Be_{2n-1}, e_{2n-1}) - (BP_2S_nP_1Be_{2n}, e_{2n}) =$$
$$= -(P_2BS_nBP_1e_{2n-1}, e_{2n-1}) - (P_2BS_nBP_1e_{2n}, e_{2n}) =$$
$$-(BS_nBe_{2n-1}, e_{2n-1}) - (BS_nBe_{2n}, e_{2n}) =$$
$$= -\left(BS_n \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq n}} [(Be_{2n-1}, e_{2m-1})e_{2m-1} + (Be_{2n-1}, e_{2m})e_{2m}]\right) -$$
$$-\left(BS_n \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq n}} [(Be_{2n}, e_{2m-1})e_{2m-1} + (Be_{2n}, e_{2m})e_{2m}]\right) =$$
$$= -\left(\sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq n}} \frac{(Be_{2n-1}, e_{2m-1})(Be_{2m-1}, e_{2n-1})}{n^2 - m^2} + \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq n}} \frac{(Be_{2n-1}, e_{2m})(Be_{2m}, e_{2n-1})}{n^2 - m^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq n}} \frac{(Be_{2n}, e_{2m-1})(Be_{2m-1}, e_{2n})}{n^2 - m^2} + \sum_{\substack{m\geq 1 \\ m\neq n}} \frac{(Be_{2n}, e_{2m})(Be_{2m}, e_{2n})}{n^2 - m^2}\right).$$

Значения скалярных произведений выпишем, пользуясь результатами, доказанными в предыдущей теореме:

$$(Be_{2n-1}, e_{2n-1}) = (-1)^{n+1} a_{1n}^{\cos} = \frac{(-1)^{n+1}}{n};\ (Be_{2n}, e_{2n}) = (-1)^n n a_{0n}^{\sin} = (-1)^n;$$

$$(Be_{2n-1}, e_{2m}) = (-1)^{n+1} a_{1m}^{\sin} = \frac{(-1)^{n+1}}{m};\ (Be_{2m}, e_{2n-1}) = (-1)^m m a_{0n}^{\cos} = \frac{(-1)^m m}{n};$$

$$(Be_{2n}, e_{2m}) = (-1)^n n a_{0m}^{\sin} = \frac{(-1)^n n}{m};\ (Be_{2m}, e_{2n}) = (-1)^m m a_{0n}^{\sin} = \frac{(-1)^m m}{n};$$

$$(Be_{2n-1}, e_{2m-1}) = (-1)^{n+1} a_{1m}^{\cos} = \frac{(-1)^{n+1}}{m};\ (Be_{2m-1}, e_{2n-1}) = (-1)^{m+1} a_{1n}^{\cos} = \frac{(-1)^{m+1}}{n};$$

$$(Be_{2n}, e_{2m-1}) = (-1)^n n a_{0m}^{\cos} = \frac{(-1)^n n}{m};\ (Be_{2m-1}, e_{2n}) = (-1)^{m+1} a_{1n}^{\sin} = \frac{(-1)^{m+1}}{n}.$$

Таким образом, оценка имеет вид:

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1) - \frac{1}{2}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n} + (-1)^{n+1} + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{m}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{n}}{n^2-m^2} + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{m}\cdot\frac{(-1)^m m}{n}}{n^2-m^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{\frac{(-1)^n n}{m}\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{n}}{n^2-m^2} + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{\frac{(-1)^n n}{m}\cdot\frac{(-1)^m m}{n}}{n^2-m^2}\right)\right| =$$

$$= \left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(-1 + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^m}{n^2-m^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^{m+1}}{m(n^2-m^2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^{m+1}}{m(n^2-m^2)} - \frac{1}{n}\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^m}{n^2-m^2}\right)\right| =$$

$$= \left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(-1 + \frac{1}{n} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^m}{n^2-m^2} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^{m+1}}{m(n^2-m^2)}\right)\right| =$$

$$= \left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-1 + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^m}{n^2-m^2} + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \frac{(-1)^{m+1}}{m(n^2-m^2)}\right)\right| =$$

$$= \left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1) + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-1 + \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\neq n}} \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{(-1)^m}{n^2-m^2}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{(n^2+1)\cdot\gamma_2(n)\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{n^2+1}}{\sqrt{D(n)}} = \frac{2\gamma_2(n)}{\sqrt{(1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n))^2 - 4\gamma_1(n)\gamma_2(n)}}.$$

Входящие в правую часть этого выражения значения величин $\gamma_1(n)$, $\gamma_2(n)$ примут вид:

$$\gamma_1(n) = \left(\frac{\alpha_0^2 n^4 + 1}{n^6} \; + \; \frac{4}{n^2} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{n^4 + m^4}{m^2 |n^2 - m^2|^2} \right)^{1/2},$$

$$\gamma_2(n) = 2 \max \left\{ \frac{1}{2n-1}; \frac{|a_0^0|}{4n^2} + \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{|n^2 - m^2|} \right\},$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{|a_0^0|^2 + |a_1^0|^2}{2}}$, $a_0^0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)dt$, $a_1^0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)dt$.

Используя интегральный признак Коши, получим:

$$\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{|n^2 - m^2|} \;\leq \left| \frac{1}{1 - n^2} \right| + \left| \int\limits_1^{n-1} \frac{dx}{x^2 - n^2} \right| + \left| \frac{1}{(n+1)^2 - n^2} \right| + \left| \int\limits_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - n^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{2n} \left| \ln \left| \frac{x - n}{x + n} \right| \Bigg|_1^{n-1} \right| + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} \left| \ln \left| \frac{x - n}{x + n} \right| \Bigg|_{n+1}^{\infty} \right| =$$

$$= \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{2n} \left| \ln \left| \frac{1}{2n-1} \right| - \ln \left| \frac{1-n}{1+n} \right| \right| + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} \left| \ln \left| \lim_{x \to \infty} \frac{x-n}{x+n} \right| - \ln \left| \frac{1}{2n+1} \right| \right| =$$

$$= \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} \left| \ln \frac{n+1}{(2n-1)(n-1)} \right| + \frac{1}{2n} |\ln(2n+1)| =$$

$$= \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} \left| \ln \frac{1 + \frac{1}{n}}{(2n - 3 + \frac{1}{n}} \right| + \frac{1}{2n} \ln(2n+1) \;\leq c_1 \cdot \frac{\ln n}{n}.$$

Тогда $\gamma_2(n) \;\leq c_2 \cdot \frac{\alpha_0 \ln n}{n}$, и мы приходим к окончательной оценке собственных значений оператора $A - B$:

$$\left| \widetilde{\lambda}_n - (n^2 + 1) + \frac{(-1)^n}{2} \right| \leq \; \frac{2 c_2 \alpha_0 \ln n}{n} = c \cdot \frac{\ln n}{n}, \; c = 2 c_2 \alpha_0.$$

Оценка на соответствующие проекторы Рисса имеет вид ([15, теорема 1.2.4, с. 43]):

$$\| \widetilde{P}_n - P_n \| \; \leq \; \frac{2\gamma_1(n)}{\sqrt{D(n)} + 1 - 3\gamma_1(n) - \gamma_2(n)},$$

где $\widetilde{P}_n$ есть проектор Рисса, построенный по спектральному множеству $\widetilde{\sigma}_n$ оператора $A - B$. Учитывая, что норма берется в гильбертовом пространстве $L_2[0, 2\pi]$, получим:

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} \left| (\widetilde{P}_n x)(t) - (x(t), e_{2n-1}(t)) e_{2n-1}(t) - (x(t), e_{2n}(t)) e_{2n}(t) \right|^2 dt \right)^{1/2} \;=$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| (\widetilde{P}_n x)(t) - \left(\int\limits_0^{2\pi} x(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos ntdt\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\int\limits_0^{2\pi} x(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin ntdt\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \right|^2 dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| (\widetilde{P}_n x)(t) - \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} x(t) \cos ntdt\right) \cos nt - \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} x(t) \sin ntdt\right) \sin nt \right|^2 dt\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{2\gamma_1(n)}{\sqrt{(1-\gamma_1(n)-\gamma_2(n))^2 - 4\gamma_1(n)\gamma_2(n)} + 1 - 3\gamma_1(n) - \gamma_2(n)} \leq c(n)\gamma_1(n)$$

для $n \geq 1$ и некоторой последовательности $c > 0$, где $\lim\limits_{n\to\infty} c(n) = 1$. Теорема доказана.

Следующее утверждение, справедливое для рассматриваемого оператора (1), следует из работы [14].

Лемма 2. *Пусть функции $a_0, a_1 \in L_2[0, 2\pi]$. Тогда, начиная с некоторого натурального n_0, оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_n X^*(n), n \geq n_0$, где $X^*(n)$ представим в виде (6), и $\|P(\Delta_1(n), A) - P(\widetilde{\Delta}_1(n), A - B)\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. — М. : Физматгиз, 1961. — 936 с.

2. Баскаков, А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

3. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Изв. РАН. Сер. математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/im4202.

4. Баскаков, А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, Д. М. Поляков // Математический сборник. — 2017. — Т. 208, № 1. — С. 3–47. — DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm8637.

5. Баскаков, А. Г. Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями / А. Г. Баскаков, Т. К. Кацаран // Дифференциальные уравнения. — 1988. — Т. 24, № 8. — С. 1424–1433.

6. Баскаков, А. Г. Спектральные свойства относительно конечномерных возмущений спектральных операторов / А. Г. Баскаков // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 1. — С. 3–11.

7. Баскаков, А. Г. Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений / А. Г. Баскаков // Изв. АН СССР. Сер. математическая. — 1986. — Т. 50, № 3. — С. 435–457.

8. Бештоков, М. Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами / М. Х. Бештоков // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2016. — Т. 56, № 10. — С. 1780–1794. — DOI: http://dx.doi.org/10.7868/S0044466916100045.

9. Гордезиани, Д. Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 1. — С. 94–103.

10. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М : Наука, 1965. — 448 с.

11. Данфорд, Н. Линейные операторы / Н. Данфорд, Д. Т. Шварц. — М. : Мир, 1966. — Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. — 1063 с.

12. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1-го рода с ядрами, зависящими от времени / Л. С. Пулькина // Изв. вузов. Математика. — 2012. — № 10. — С. 32–44.

13. Сильченко, Ю. Т. Об оценке резольвенты дифференциального оператора второго порядка с нерегулярными граничными условиями / Ю. Т. Сильченко // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 2. — С. 65–68.

14. Ульянова, Е. Л. О спектральных свойствах относительно конечномерных возмущений самосопряженных операторов / Е. Л. Ульянова // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 10. — С. 75–78.

15. Ульянова, Е. Л. Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерными: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ульянова Елена Леонидовна. — Воронеж, 1998. — 100 с.

16. Шкаликов, А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями / А. А. Шкаликов // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. — 1982. — № 6. — С. 41–51.

17. Юлдашев, Т. К. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с нелокальным интегральным условием / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 1. — С. 11–23. — DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.2.

18. Юлдашев, Т. К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2017. — № 1. — С. 42–54. — DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.

REFERENCES

1. Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric Series]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 936 p.

2. Baskakov A.G. *Garmonicheskiy analiz lineynykh operatorov* [Harmonic Analysis of Linear Operators]. Voronezh, Izd-vo VGU Publ., 1987. 165 p.

3. Baskakov A.G., Derbushev A.V., Shcherbakov A.O. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize nesamosopryazhennogo operatora Diraka s negladkim potentsialom [The Method of Similar Operators in the Spectral Analysis of Non-Self-Adjoint Dirac Operators with Non-Smooth Potentials]. *Izv. RAN. Ser. matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2011, vol. 75, no. 3, pp. 3-28. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/im4202.

4. Baskakov A.G., Polyakov D.M. Metod podobnykh operatorov v spektralnom analize operatora Khilla s negladkim potentsialom [The Method of Similar Operators in the Spectral Analysis of the Hill Operator with Nonsmooth Potential]. *Matematicheskiy sbornik* [Sbornik: Mathematics], 2017, vol. 208, no. 1, pp. 3-47. DOI: http://dx.doi.org/10.4213/sm8637.

5. Baskakov A.G., Katsaran T.K. Spektralnyy analiz integro-differentsialnykh operatorov s nelokalnymi kraevymi usloviyami [Spectral Analysis of Integro-Differential Operators with

Nonlocal Boundary Conditions]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1988, vol. 24, no. 8, pp. 1424-1433.

6. Baskakov A.G. Spektralnye svoystva otnositelno konechnomernykh vozmushcheniy spektralnykh operatorov [Spectral Analysis with Respect to Finite-Dimensional Perturbations of Spectral Operators]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1991, no. 1, pp. 3-11.

7. Baskakov A.G. Teorema o rasshcheplenii operatora i nekotorye smezhnye voprosy analiticheskoy teorii vozmushcheniy [A Theorem on Splitting an Operator, and Some Related Questions in the Analytic Theory of Perturbations]. *Izv. AN SSSR. Ser. matematicheskaya* [Mathematics of the USSR — Izvestiya], 1987, vol. 28, no. 3, pp. 421-444.

8. Beshtokov M.Kh. Raznostnyy metod resheniya nelokalnoy kraevoy zadachi dlya vyrozhdayushchegosya psevdoparabolicheskogo uravneniya tretyego poryadka s peremennymi koeffitsientami [Difference Method for Solving a Nonlocal Boundary Value Problem for a Degenerating Third-Order Pseudo-Parabolic Equation with Variable Coefficients]. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Math. and Mathematical Physics], 2016, vol. 56, no. 10, pp. 1763-1777. DOI: http://dx.doi.org/10.7868/S0044466916100045.

9. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Resheniya nelokalnykh zadach dlya odnomernykh kolebaniy sredy [A Numerical Method for Solving One Nonlocal Boundary Value Problem for a Third-Order Hyperbolic Equation]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94-103.

10. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gilbertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 448 p.

11. Danford N., Shvarts D.T. Lineynye operatory [Linear Operators]. Moscow, Mir Publ., 1966, vol. 2. Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space. 1063 p.

12. Pulkina L.S. Nelokalnaya zadacha dlya giperbolicheskogo uravneniya s integralnymi usloviyami 1-go roda s yadrami, zavisyashchimi ot vremeni [A Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions of the 1st Kind with Time-Dependent Kernels]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2012, no. 10, pp. 32-44.

13. Silchenko Yu.T. Ob otsenke rezolventy differentsialnogo operatora vtorogo poryadka s neregulyarnymi granichnymi usloviyami [On an Estimate for the Resolvent of a Second-Order Differential Operator with Irregular Boundary Conditions]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2000, no. 2, pp. 65-68.

14. Ulyanova E.L. O spektralnykh svoystvakh otnositelno konechnomernykh vozmushcheniy samosopryazhennykh operatorov [On the Spectral Properties of Relatively Finite-Dimensional Perturbations of Selfadjoint Operators]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1997, no. 10, pp. 75-78.

15. Ulyanova E.L. *Spektralnyy analiz normalnykh operatorov, vozmushchennykh otnositelno konechnomernymi: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Spectral Analysis of the Normal Operators with Perturbed Relatively Finite-Dimensional. Cand. Phys. and Math. Sci. Diss.]. Voronezh, 1998. 100 p.

16. Shkalikov A.A. O bazisnosti sobstvennykh funktsiy obyknovennykh differentsialnykh operatorov s integralnymi kraevymi usloviyami [On Basis Property of Eigenfunctions of Ordinary Differential Operators with Integral Boundary Conditions]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1982, no. 6, pp. 41-51.

17. Yuldashev T.K. Nelineynoe integro-differentsialnoe uravnenie psevdoparabolicheskogo tipa s nelokalnym integralnym usloviem [Nonlinear Integro-Differential Equation of Pseudoparabolic Type With Nonlocal Integral Condition]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd state university. Mathematics. Physics], 2016, no. 1, pp. 11-23. DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.2.

18. Yuldashev T.K. Nelokalnaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo psevdoparabolicheskogo integro-differentsialnogo uravneniya s vyrozhdennym yadrom [Nonlocal Boundary Value Problem for a Nonhomogeneous Pseudoparabolic-Type Integro-Differential

Equation With Degenerate Kernel]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2017, no. 1, pp. 42-54. DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.

SPECTRAL PROPERTIES OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR DETERMINED BY NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Aleksandr Nikolaevich Shelkovoy

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematics and Physical-Mathematical Modeling,
Voronezh State Technical University
shelkovoj.aleksandr@mail.ru
Prosp. Moskovskiy, 14, 394026 Voronezh, Russian Federation

Abstract. In this work we study the spectral properties of the operator acting in the Hilbert space $L_2[0,2\pi]$ defined by the differential expression $\mathcal{L}y = -\ddot{y} + y$ and nonlocal boundary conditions

$$y(0) = y(2\pi) + \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(2\pi) + \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt.$$

Here a_0 and a_1 are functions from $L_2[0,2\pi]$.

To investigate spectrum of the operator, $\mathcal{L}$ is used adjoint of the operator $\mathcal{L}^*$ one defined by the differential expression $(\mathcal{L}^*x)(t) = (Ax)(t) - (Bx)(t)$ and boundary conditions $x(0) = x(2\pi)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$, with A generated by the differential expression $Ax = -\ddot{x} + x$ with the domain

$$D(A) = \{x \in L_2[0,2\pi] : x,\ \dot{x} \in C[0,2\pi],\ \ddot{x} \in L_2[0,2\pi],$$
$$x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)\},$$

and $(Bx)(t) = \dot{x}(2\pi)a_0(t) - x(2\pi)a_1(t),\ t \in [0,2\pi],\ x \in D(A)$.

As a method of studying the spectral properties of the operator $A - B$ the similar operators method serves.

One of the main results is the following theorem.

Theorem 3. Let functions a_0 and a_1 of bounded variation on a segment $[0,2\pi]$ and sequences $\gamma_1, \gamma_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ defined by formulas:

$$\gamma_1(n) = \left(\frac{\alpha_0^2 n^4 + 1}{n^6} \; + \; \frac{4}{n^2} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{n^4 + m^4}{m^2 |n^2 - m^2|^2} \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\gamma_2(n) = 2 \max \left\{ \frac{1}{2n-1}; \frac{|a_0^0|}{4n^2} + \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \neq n}} \frac{1}{|n^2 - m^2|} \right\} < \infty$$

and

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{|a_0^0|^2 + |a_1^0|^2}{2}}, \quad a_0^0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)dt, \quad a_1^0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)dt.$$

Let conditions $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_1(n) = 0, \lim\limits_{n\to\infty}\gamma_2(n) = 0$ hold true. Then the spectrum $\sigma(A-B)$ of operator $A-B$ can be represented as $\sigma(A-B) = \bigcup\limits_{n\geq 1}\widetilde{\sigma}_n$ where $\widetilde{\sigma}_n,\ n\geq 1,$ — no more than set of two points. Provided that the estimates:

$$\left|\widetilde{\lambda}_n - (n^2+1)\ +\ \frac{(-1)^n}{2}\right|\ \leq\ c\cdot\frac{\ln n}{n},$$

where $\widetilde{\lambda}_n$ — the weighted mean of eigenvalues in $\widetilde{\sigma}_n$.

Equally satisfy estimates:

$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|(\widetilde{P}_n x)(t) - \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} x(t)\cos ntdt\right)\cos nt -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin ntdt\right)\sin nt\right|^2 dt\right)^{1/2} \leq c(n)\gamma_1(n),\ n\geq 1,$$

for some sequence c>0 where $\lim\limits_{n\to\infty} c(n) = 1$. Here $\widetilde{P}_n$ is the Riesz projector constructed by spectral of set $\widetilde{\sigma}_n$ of operator $A-B$.

Key words: eigenvalues, operator spectrum, differential operator of second order operator, spectrum asymptotic, similar operators method.