www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2018.4.1

УДК 517.956
ББК 22.161

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1]

Серик Аймурзаевич Алдашев

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики
и математического моделирования,
Казахский национальный педагогический университет им. Абая
aldash51@mail.ru
ул. Толе би, 86, 0500012 г. Алматы, Казахстан

Аннотация. В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений рассматривается спектральная задача Дирихле. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

Ключевые слова: критерий, разрешимость, спектральная задача, уравнения, многомерная область.

Введение

Двумерные спектральные задачи для уравнений гиперболо-эллиптического типа интенсивно изучаются [7; 11–14], однако, насколько нам известно, их многомерные аналоги исследованы мало [1–3; 5].

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющее множество $\{t = 0,\, 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерные смешанно гиперболо-эллиптические уравнения со спектральным действительным параметром γ

$$\Delta_x u - \operatorname{sgn} t u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = \gamma u, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots x_m$, $m \geq 2$.

В качестве многомерной спектральной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Задача $\mathcal{D}$. *Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = 0, \quad u\Big|_{\sigma_\beta} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим r, θ_1,...,θ_{m-1}, t, где $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-2)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ...$ — пространства Соболева.

Имеют место следующие утверждения [10].

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f_n^k(r) = \int_H f(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH,$$

где H — единичная сфера в E_m.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1,\, c_2 = \text{const}.$$

Через $\widetilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{b}_n^k(r,t)$, $\widetilde{c}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i\frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i=1,...,m$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$.

Пусть $a_i(r,\theta,t)$, $b(r,\theta,t)$, $c(r,\theta,t)\in W_2^l(\Omega_{\alpha\beta})\subset C(\bar{D}_{\alpha\beta})$, $l\geq m+1$, $i=1,...,m$. Тогда справедлив критерий.

Теорема 1. *При $\gamma\neq-\mu_{s,n}^2$ задача $\mathcal{D}$ имеет только тривиальное решение, тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\cos\alpha\sqrt{\mu}\,\mathrm{sh}\,\beta\sqrt{\mu}\neq\sin\alpha\sqrt{\mu}\,\mathrm{ch}\,\beta\sqrt{\mu},\ \mu=\gamma+\mu_{s,n}^2>0, \tag{5}$$

или

$$\mathrm{ch}\,\alpha\sqrt{|\mu|}\sin\beta\sqrt{|\mu|}\neq\mathrm{sh}\,\alpha\sqrt{|\mu|}\cos\beta\sqrt{|\mu|},\ \mu=\gamma+\mu_{s,n}^2<0, \tag{6}$$

где $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $s=1,2,\ldots$

Отметим, что при $a_i(x,t)=b(x,t)=c(x,t)=0$, $i=1,...,m$ эта теорема получена в [3].

2. Доказательство теоремы

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$L_1u\equiv u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=\gamma u, \tag{7}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j\sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),$$

$$g_1=1,\quad g_j=(\sin\theta_1...\sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно (см. [10]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+m-2)$, $n=0,1,\ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи $\mathcal{D}$ в области Ω_α будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{8}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (8) в (7), умножив полученное выражение на $\rho(\theta)\neq0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\bar{u}_n^k$, получим [4]

$$\begin{gathered}\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1-\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1+\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\tilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\tilde{c}_0^1\bar{u}_0^1-\gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k-\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\tilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right.\\\left.+\left[\tilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\tilde{a}_{in-1}^k-na_n^k)\right]\bar{u}_n^k-\gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1, \tag{10}$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k =$$

$$= \gamma \rho_1^k \bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \qquad n = 1, \quad k = \overline{1,\, k_1}, \tag{11}$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k -$$

$$- \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\},$$

$$k = \overline{1,\, k_n}, \quad n = 2, 3 \ldots \tag{12}$$

Суммируя уравнения (11) от 1 до k_1, а уравнение (12) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (10), приходим к уравнению (9).

Отсюда следует, что если $\left\{ \bar{u}_n^k \right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ — решение системы (10)–(12), то оно является и решением уравнения (9).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10)–(12) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \gamma \bar{u}_n^k + \bar{f}_n^k(r, t), \tag{13}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее из краевого условия (2), в силу (8), будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1 \ldots . \tag{14}$$

В (13), (14), произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t)$, получим

$$L u_n^k \equiv u_{nrr}^k - u_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = \gamma u_n^k + f_n^k(r, t), \tag{15}$$

$$u_n^k(r, \alpha) = 0, \quad u_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{16}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \ldots \; f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t).$$

Решение задачи (15), (16) будем искать в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{17}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r). \tag{18}$$

Подставляя (17) в (15), (16), с учетом (18), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{19}$$

$$R_s(1) = 0,\ \left| R_s(0) \right| < \infty, \tag{20}$$

$$T_{stt} + \mu T_s(t) = -a_{ns}^k(t),\ 0 < t < \alpha, \tag{21}$$

$$T_s(\alpha) = (0). \tag{22}$$

Ограниченным решением задачи (19), (20) является [9]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{23}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2 + \gamma$.

Общее решение уравнения (21) представимо в виде [9]

$$T_{s,n}(t) = \begin{cases} c_{1s} \cos t\sqrt{\mu} + c_{2s} \sin t\sqrt{\mu} + \dfrac{\cos t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \sin \xi\sqrt{\mu} d\xi - \\ -\dfrac{\sin t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \cos \xi\sqrt{\mu} d\xi, \quad \mu > 0, \\ c_{1s} + c_{2s} t - \int\limits_0^t (t - \xi) a_{ns}^k(\xi) d\xi, \quad \mu = 0, \\ c_{1s} \operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|} + c_{2s} \operatorname{sh} t\sqrt{|\mu|} + \dfrac{\operatorname{ch} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \xi\sqrt{|\mu|} d\xi - \\ -\dfrac{\operatorname{sh} t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \xi\sqrt{|\mu|} d\xi, \quad \mu < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Откуда, учитывая условие (22), получим следующее

$$T_{s,n}(t) = \begin{cases} c_{1s} \cos \alpha\sqrt{\mu} + c_{2s} \sin \alpha\sqrt{\mu} = \dfrac{\sin \alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \cos \xi\sqrt{\mu} d\xi - \\ -\dfrac{\cos \alpha\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \sin \xi\sqrt{\mu} d\xi, \quad \mu > 0, \\ c_{1s} + c_{2s}\alpha = \int\limits_0^\alpha (\alpha - \xi) a_{ns}^k(\xi) d\xi, \quad \mu = 0, \\ c_{1s} \operatorname{ch} \alpha\sqrt{|\mu|} + c_{2s} \operatorname{sh} \alpha\sqrt{|\mu|} = \dfrac{\operatorname{sh} \alpha\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \xi\sqrt{\mu} d\xi - \\ -\dfrac{\operatorname{ch} \alpha\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \xi\sqrt{|\mu|} d\xi, \quad \mu < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Подставляя (23) в (18), получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{26}$$

Ряд (26) — разложение в ряд Фурье — Бесселя ([6]), если

$$a_{ns}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{27}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23), (24) получим решение задачи (15), (16)

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{28}$$

где $a_{ns}^k(t)$ находится из (26).

Следовательно, сначала решив задачу (10)–(12) ($n = 0$), а затем (11), (12) с ($n = 1$) и т. д., найдем последовательно всех $u_n^k(r, t)$ из (28), $k = \overline{1, k_n}$, $\ldots n = 0, 1, \ldots$

Итак, в области Ω_α имеет место равенство

$$\int\limits_H \rho(\theta)(L_1 - \gamma) u dH = 0. \tag{29}$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in$ $\in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ [8].

Отсюда и из (29) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} f(r, \theta, t)(L_1 - \gamma) u d\Omega_\alpha = 0$$

и

$$L_1 u = \gamma u, \qquad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\alpha.$$

Теперь переходим в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$L_2 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = \gamma u \tag{30}$$

с условием (3).

Решение задачи (30), (3) будем искать в виде (7).

Подставляя (8) в (30), будем иметь

$$\begin{gathered} \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 - \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m \left(\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k \right) \right] \bar{u}_n^k - \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1, \tag{32}$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = \gamma \rho_0^1 u_1^k - \\ - \frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \qquad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \tag{33}$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k - \\ - \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + [\widetilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} (\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k)] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \\ k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{34}$$

Суммируя уравнения (33) от 1 до k_1, а уравнения (34) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (32), приходим к уравнению (31).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ — решение системы (32)–(34), то оно является и решением уравнения (31).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (32)–(34) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \gamma \bar{u}_n^k + \bar{g}_n^k(r, t), \tag{35}$$

где $\bar{g}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{g}_0^1(r, t) \equiv 0$.

Далее из краевого условия (3) в силу (8) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{36}$$

В (35) и (36), произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$, получим

$$L u_n^k \equiv u_{nrr}^k + u_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = \gamma u_n^k + g_n^k(r, t), \tag{37}$$

$$u_n^k(r, \beta) = 0, \ \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

$$g_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{g}_n^k(r, t).$$

Решение задачи (37), (38) будем искать по формуле

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) V_s(t), \tag{17'}$$

при этом пусть

$$g_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k(t) R_s(r). \tag{39}$$

Подставляя (17′) в (37), (38), с учетом (39), получим задачу (19), (20), решение которой имеет вид (23), и задачу

$$V_{stt} - \mu V_s = b^k_{ns}(t), \qquad \beta < t < 0, \tag{40}$$

с условием

$$V_s(\beta) = 0. \tag{41}$$

Общее решение уравнения (40) представимо в виде ([10])

$$V_{s,n}(t) = \begin{cases} c'_{1s}\operatorname{ch} t\sqrt{\mu} + c'_{2s}\operatorname{sh} t\sqrt{\mu} + \dfrac{\operatorname{ch} t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\xi\sqrt{\mu}d\xi - \\ -\dfrac{\operatorname{sh} t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\xi\sqrt{\mu}d\xi, \ \mu > 0, \\ c'_{1s} + c'_{2s}t - \int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)(t-\xi)d\xi, \ \mu = 0, \\ c'_{1s}\cos t\sqrt{|\mu|} + c'_{2s}\sin t\sqrt{|\mu|} + \dfrac{\cos t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\sin\xi\sqrt{|\mu|}d\xi - \\ -\dfrac{\sin t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\cos\xi\sqrt{|\mu|}d\xi, \ \mu < 0, \end{cases} \tag{42}$$

Принимая во внимание условие (41), будем иметь

$$V_{s,n}(t) = \begin{cases} c'_{1s}\operatorname{ch}\beta\sqrt{\mu} + c'_{2s}\operatorname{sh}\beta\sqrt{\mu} = \dfrac{\operatorname{sh}\beta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_\beta^0 b^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\xi\sqrt{\mu}d\xi - \\ -\dfrac{\operatorname{ch}\beta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}\int\limits_\beta^0 b^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\xi\sqrt{\mu}d\xi, \ \mu > 0, \\ c'_{1s} + c'_{2s}\beta = \int\limits_\beta^0 b^k_{ns}(\xi)(\beta-\xi)d\xi, \ \mu = 0, \\ c'_{1s}\cos\beta\sqrt{|\mu|} + c'_{2s}\sin\beta\sqrt{|\mu|} = \dfrac{\sin\beta\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_\beta^0 b^k_{ns}(\xi)\cos\xi\sqrt{|\mu|}d\xi - \\ -\dfrac{\cos\beta\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}}\int\limits_\beta^0 b^k_{ns}(\xi)\sin\xi\sqrt{|\mu|}d\xi, \ \mu < 0. \end{cases} \tag{43}$$

Подставляя (23) в (39), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}g^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b^k_{ns}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \ 0 < r < 1,$$

которая является рядом Фурье — Бесселя, если

$$b^k_{ns}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}g^k_n(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi. \tag{44}$$

Из (23), (42) получим решение задачи (37), (38)

$$u^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}V_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{45}$$

где $b^k_{ns}(t)$ определяется из (44). Следовательно, сначала решив задачу (32), (36) ($n = 0$), а затем (33), (36) ($n = 1$) и т. д., найдем последовательно все $u^k_n(r,t)$ из (45), $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$

Итак, в области Ω_β имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta)(L_2 - \gamma)udH = 0. \tag{46}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((\beta, 0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\beta)$.

Отсюда и из (46) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)(L_2 - \gamma)ud\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_2 u = 0, \quad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи $\mathcal{D}$ в областях Ω_α и Ω_β являются функции

$$u(r,\theta,t) \equiv \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sum\limits_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y^k_{n,m}(\theta), t > 0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n}\sum\limits_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} V_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y^k_{n,m}(\theta), t < 0, \end{cases} \tag{47}$$

где $T_{s,n}(t)$, $V_{s,n}(t)$ определяются из (24), (42).

Так как искомое решение $u \in C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})$, то из (8), (17) и (17′) следует, что $T_{s,n}(0) = V_{s,n}(0)$, $T'_{s,n}(0) = T'_{s,n}(0)$, то есть $c_{1s} = c'_{1s}$, $c_{2s} = c'_{2s}$.

Отсюда и из (25), (43) для неизвестных коэффициентов c_{1s}, c_{2s} получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\mu}(c_{1s}\cos\alpha\sqrt{\mu} + c_{2s}\sin\alpha\sqrt{\mu}) = \sin\alpha\sqrt{\mu}\int\limits_0^\alpha a^k_{ns}(\xi)\cos\xi\sqrt{\mu}d\xi - \\ \qquad - \cos\alpha\sqrt{\mu}\int\limits_0^\alpha a^k_{ns}(\xi)\sin\xi\sqrt{\mu}d\xi, \\ \sqrt{\mu}(c_{1s}\operatorname{ch}\beta\sqrt{\mu} + c_{2s}\operatorname{sh}\beta\sqrt{\mu}) = \operatorname{sh}\beta\sqrt{\mu}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\xi\sqrt{\mu}d\xi - \\ \qquad - \operatorname{ch}\beta\sqrt{\mu}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\xi\sqrt{\mu}d\xi, \end{cases} \tag{48}$$

при $\mu = \gamma + \mu^2_{s,n} > 0$. Для $\mu = \gamma + \mu^2_{s,n} < 0$ система будет иметь вид

$$\begin{cases} \sqrt{|\mu|}(c_{1s}\operatorname{ch}\alpha\sqrt{|\mu|} + c_{2s}\operatorname{sh}\alpha\sqrt{|\mu|}) = \operatorname{sh}\alpha\sqrt{|\mu|}\int\limits_0^\alpha a^k_{ns}(\xi)\operatorname{ch}\xi\sqrt{|\mu|}d\xi - \\ \qquad - \operatorname{ch}\alpha\sqrt{|\mu|}\int\limits_0^\alpha a^k_{ns}(\xi)\operatorname{sh}\xi\sqrt{|\mu|}d\xi, \\ \sqrt{|\mu|}(c_{1s}\cos\beta\sqrt{|\mu|} + c_{2s}\sin\beta\sqrt{|\mu|}) = \sin\beta\sqrt{|\mu|}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\cos\xi\sqrt{|\mu|}d\xi - \\ \qquad - \cos\beta\sqrt{|\mu|}\int\limits_t^0 b^k_{ns}(\xi)\sin\xi\sqrt{|\mu|}d\xi. \end{cases} \tag{49}$$

Если $\gamma \neq -\mu_{s,n}^2$ и выполняется условие (5) или (6), то из (27), (48) и (49) вытекает, что $c_{1s} = c_{2s} = 0$, $s = 1, 2, \ldots$

Следовательно, из (24), (28), (42), (45) получим, что $T_{s,n}(t) = V_{s,n}(t) = 0$ и $u_n^k(r,t) = 0$, $s = 1, 2, \ldots$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$

Далее из (47), в свою очередь, получим $u = 0$ в $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть теперь условие (5) или (6) нарушено хотя бы для одного $s = l$.

Тогда из (24), (42), (48), (49) следует, что нетривиальными решениями задачи $\mathcal{D}$ при $\mu = \gamma + \mu_{l,n}^2 > 0$ являются функции

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} \Big[c_{1l}\cos t\sqrt{\mu} + c_{2l}\sin t\sqrt{\mu} + \\ \quad + \dfrac{\cos t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^t a_{ln}^k(\xi)\sin\xi\sqrt{\mu}d\xi - \\ \quad - \dfrac{\sin t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^t a_{ln}^k(\xi)\cos\xi\sqrt{\mu}d\xi \Big] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0, \\ u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} \Big[c_{1l}\,\mathrm{ch}\, t\sqrt{\mu} + c_{2l}\,\mathrm{sh}\, t\sqrt{\mu} + \\ \quad + \dfrac{\mathrm{ch}\, t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^t b_{ln}^k(\xi)\,\mathrm{sh}\,\xi\sqrt{\mu}d\xi - \\ \quad - \dfrac{\mathrm{sh}\, t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0^t b_{ln}^k(\xi)\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{\mu}d\xi \Big] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad t < 0. \end{cases} \tag{50}$$

В случае $\mu = \gamma + \mu_{l,n}^2 < 0$ решения задачи $\mathcal{D}$ имеют вид

$$\begin{cases} u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} \Big[c_{1l}\,\mathrm{ch}\, t\sqrt{|\mu|} + c_{2l}\,\mathrm{sh}\, t\sqrt{|\mu|} + \\ \quad + \dfrac{\mathrm{ch}\, t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_{ln}^k(\xi)\,\mathrm{sh}\,\xi\sqrt{|\mu|}d\xi - \\ \quad - \dfrac{\mathrm{sh}\, t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_0^t a_{ln}^k(\xi)\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{|\mu|}d\xi \Big] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0, \\ u(r,\theta,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} \Big[c_{1l}\cos t\sqrt{|\mu|} + c_{2l}\sin t\sqrt{|\mu|} + \\ \quad + \dfrac{\cos t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_t^0 b_{ln}^k(\xi)\sin\xi\sqrt{|\mu|}d\xi - \\ \quad - \dfrac{\sin t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int\limits_t^0 b_{ln}^k(\xi)\cos\xi\sqrt{|\mu|}d\xi \Big] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \ t < 0. \end{cases} \tag{51}$$

Здесь и выше константы $c_{1l} \neq 0$, $c_{2l} \neq 0$.

Учитывая формулу $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ (см. [6]) и оценки [10; 15],

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0,$$
$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2},$$
$$\left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},$$
$$c_1, c_2 = \mathrm{const}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \ldots,$$

а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1), как в [8], можно показать, что если $p > \frac{3m}{2}$, то функции (50), (51) принадлежит необходимому классу гладкости $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$.

Следовательно, критерий для задачи $\mathcal{D}$ установлен.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алдашев, С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе / С. А. Алдашев // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. — 2014. — № 3 (295). — С. 136–142.

2. Алдашев, С. А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений / С. А. Алдашев // Нелинейные колебания. — 2013. — Т. 16, № 4. — С. 435–451.

3. Алдашев, С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе / С. А. Алдашев // Известия вузов. Математика. — 2011. — № 4. — С. 3–7.

4. Алдашев, С. А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений / С. А. Алдашев // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, № 1. — С. 64–68.

5. Алдашев, С. А. Спектральная задача Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе / С. А. Алдашев // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. — 2010. — № 6. — С. 3–6.

6. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.

7. Кальменов, Т. Ш. О регулярных краевых задачах и их спектре для уравнений гиперболического и смешанного типа : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Кальменов Тынысбек Шарипович. — М., 1982. — 28 с.

8. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

9. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1965. — 703 с.

10. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. — М. : Физматгиз, 1962. — 254 с.

11. Моисеев, Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е. И. Моисеев. — М. : Изд-во МГУ, 1998. — 150 с.

12. Пономарев, С. М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева — Бицадзе / С. М. Пономарев // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233. — С. 39–40.

13. Сабитов, К. Б. О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе со спектральным параметром / К. Б. Сабитов // Дифференциальные уравнения. — 1986. — Т. 22, № 11. — С. 1977–1984.

14. Салахитдинов, М. С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром / М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов. — Ташкент : ФАН, 1997. — 165 с.

15. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.

REFERENCES

1. Aldashev S.A. Korrektnost zadachi Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo uravneniya Lavrentyeva — Bitsadze [Well-Posedness of the Dirichlet Problem in a Cylindrical Domain for the Multidimensional Lavrentiev — Bitsadze Equation]. *Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya*, 2014, no. 3 (295), pp. 136-142.
2. Aldashev S.A. Korrektnost zadachi Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya odnogo klassa mnogomernykh giperbolo-ellipticheskikh uravneniy [Well-Posedness of the Dirichlet Problem in a Cylindrical Domain for One Class of Multidimensional Hyperbolic-Elliptic Equations]. *Nelineynye kolebaniya* [Journal of Mathematical Sciences], 2013, vol. 16, no. 4, pp. 435-451.
3. Aldashev S.A. Kriteriy odnoznachnoy razreshimosti spektralnoy zadachi Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo uravneniya Lavrentyeva — Bitsadze [A Criterion for the Unique Solvability of the Dirichlet Spectral Problem in a Cylindrical Domain for a Multidimensional Lavrent'ev — Bitsadze Equation]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2011, no. 4, pp. 3-7.
4. Aldashev S.A. O zadachakh Darbu dlya odnogo klassa mnogomernykh giperbolicheskikh uravneniy [On the Darboux Problems for a Class of Many-Dimensional Hyperbolic Equations]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1998, vol. 34, no. 1, pp. 64-68.
5. Aldashev S.A. Spektralnaya zadacha Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo uravneniya Lavrentyeva — Bitsadze [The Dirichlet Spectral Problem in a Cylindrical Domain for a Multidimensional Lavrent'ev — Bitsadze Equation]. *Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya*, 2010, no. 6, pp. 3-6.
6. Beytmen G., Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii* [Higher Transcendental Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1974, vol. 2. 295 p.
7. Kalmenov T.Sh. *O regulyarnykh kraevykh zadachakh i ikh spektre dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipa: avtoref. dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [On Regular Boundary Value Problems and Their Spectrum for Hyperbolic and Mixed Type Equations. Doctor Dissertation]. Moscow, 1982. 28 p.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 543 p.
9. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 703 p.
10. Mikhlin S.G. *Mnogomernye singulyarnye integraly i integralnye uravneniya* [Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 254 p.
11. Moiseev E.I. *Uravneniya smeshannogo tipa so spektralnym parametrom* [Equations of Mixed Type with Spectral Parameter]. Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1998. 150 p.
12. Ponomarev S.M. K zadache na sobstvennye znacheniya dlya uravneniya Lavrentyeva — Bitsadze [On the Eigenvalue Problem for the Lavrentiev — Bitsadze Equation]. *DAN SSSR* [Doklady Mathematics], 1977, vol. 233, pp. 39-40.
13. Sabitov K.B. O zadache Trikomi dlya uravneniya Lavrentyeva — Bitsadze so spektralnym parametrom [On the Tricomi Problem of the Lavrentiev — Bitsadze Equation with a Spectral Parameter]. *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations], 1986, vol. 22, no. 11, pp. 1977-1984.
14. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. *Kraevye zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa so spektralnym parametrom* [Boundary Value Problems for a Mixed-Type Equation with a Spectral Parameter]. Tashkent, FAN Publ., 1997. 165 p.
15. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 724 p.

THE CRITERION OF UNIQUE SOLVABILITY OF THE DIRICHLET SPECTRAL PROBLEM IN THE CYLINDRICAL DOMAIN FOR A CLASS OF MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-ELLIPTIC EQUATIONS

Serik Aymurzaevich Aldashev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematics and Mathematical Modeling,
Abay Kazakh National Pedagogical University
aldash51@mail.ru
Tole bi St., 86, 0500012 Almaty, Republic of Kazakhstan

Abstract. Multidimensional hyperbolic-elliptic equations describe important physical, astronomical, and geometric processes. It is known that the oscillations of elastic membranes in space according to the Hamilton principle can be modeled by multidimensional hyperbolic equations. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, Hamilton's principle also yields multidimensional elliptic equations.

Consequently, oscillations of elastic membranes in space can be modeled by multidimensional hyperbolic-elliptic equations.

The author has previously studied the Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic-elliptic equations, where the unique solvability of this problem is shown, essentially depends on the height of the entire cylindrical region under consideration.

Two-dimensional spectral problems for equations of the hyperbolic-elliptic type are intensively studied, however, as far as is known, their multidimensional analogs are poorly studied.

In this paper, we obtain a criterion for the unique solvability of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations.

Key words: criterion, solvability, spectral problem, equations, multidimensional domain.