



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.1.6>

УДК 519.6:533.7

ББК 22.19

МЕТОД ГОДУНОВА 3-ГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Евгений Иванович Васильев

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления,
Волгоградский государственный университет
vasilev@volsu.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Татьяна Анатольевна Васильева

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления,
Волгоградский государственный университет
vasilevaTA@volsu.ru, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Дмитрий Игоревич Колыбелкин

Студент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления,
Волгоградский государственный университет
cptn.cook11@gmail.com, fiou@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Борис Красовитов

Ph.D., старший научный сотрудник кафедры инженерной механики,
исследовательский центр по аэромеханике им. Дж. Перлстон,
Университет им. Бен-Гуриона, Неgev
borisk@bgu.ac.il
а/я 653, 84105 г. Беер-Шева, Израиль

Аннотация. Представлена новая модификация метода Годунова 3-го порядка аппроксимации по пространству и времени для гиперболических систем уравнений типа законов сохранения. Разностная схема метода основана на совместной дискретизации уравнений по пространству и времени без использования стадий Рунге — Кутта. Метод ориентирован на привлечение точного или приближенного решения задачи Римана для вычисления потоков между ячейками. Перед шагом по времени вычисляются поправки к аргументам задачи Римана, обеспечивающие третий порядок аппроксимации для линейных систем. После шага по времени применяется процедура коррекции численного решения для устранения погрешности 2-го порядка, возникающей из-за нелинейности уравнений. Приведены результаты экспериментальной проверки порядка аппроксимации метода на точном гладком решении внутри веера волны разрежения, возникающей при распаде разрыва. Результаты тестов полностью подтверждают 3-й порядок представленного метода.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические системы, метод Годунова, 3-й порядок, аппроксимация, построение разностных схем.

Введение

В последние два десятилетия прошлого века широкое распространение получили нелинейные разностные методы 2-го порядка аппроксимации по пространству и времени, обладающие повышенной устойчивостью на разрывных решениях. Эти методы успешно работают для большинства газодинамических задач. К таким методам относится и W-метод [1], который является модификацией известного метода Годунова [3].

С начала века активно развиваются нелинейные методы более высокого порядка аппроксимации по пространству и времени. В большинстве такие методы являются полудискретными [5; 6; 8; 9], реализующими два этапа аппроксимации дифференциальных уравнений в частных производных. На первом этапе с помощью кусочно-полиномиальной реконструкции строится дискретный разностный оператор для производных по пространству, в результате чего получается система обыкновенных дифференциальных по времени уравнений размером по количеству ячеек сетки. На втором этапе к этой системе применяются методы Рунге — Кутта 3-го или 4-го порядка по времени.

Отдельная дискретизация по пространству и времени упрощает построение метода, однако она существенно расширяет шаблон разностной схемы и требует дополнительных мер для обеспечения TVD-свойства, что приводит к увеличению количества стадий в методе Рунге — Кутта и порождает заметную диссипацию численного решения [5; 9].

Экспериментальное количественное подтверждение порядка аппроксимации построенных методов практически во всех работах осуществляется на простых решениях модельных уравнений, что не гарантирует аналогичного свойства для сложных нелинейных систем, например, для системы уравнений газовой динамики.

В данной работе предлагается метод 3-го порядка, использующий совместную дискретизацию по пространству и времени. Предлагаемый метод по существу является расширением метода Годунова 2-го порядка [1] за счет подключения двух отдельных блоков коррекции. Первый блок повышает аппроксимацию для линейных систем уравнений, а второй устраняет погрешность, возникающую из-за нелинейности уравнений.

В первом разделе представлено подробное теоретическое построение и обоснование метода 3-го порядка на примере скалярного уравнения. Во втором разделе приведено обобщение построенного метода для системы уравнений газовой динамики. В заключительном разделе представлены результаты экспериментальной проверки порядка аппроксимации метода на точном гладком решении внутри веера волны разрежения, возникающей при распаде разрыва.

1. Теоретическое построение метода 3-го порядка для скалярного уравнения

Для скалярного варианта уравнения с допущением $f_u > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

рассмотрим разностную схему на сетке с шагом τ по времени и h по пространству

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} + \frac{g_i^n - g_{i-1}^n}{h} = 0, \quad (2)$$

где $v_i^n \approx u(x_i, t_n)$ — приближенное решение, а g_i^n — приближенные функции потоков. В случае $g_i^n = f(v_i^n)$ получим эквивалент метода Годунова 1-го порядка для уравнения (1). Для более высокого порядка вид функции g должен немного отличаться от f .

Для поиска вида функции g выпишем ошибку аппроксимации схемы (2) на решении уравнения (1), которая получается путем подстановки точного решения $u(x, t)$ в разностную схему с последующим разложением по степеням h и τ в точке (x_i, t_n) :

$$R = u_t + \frac{\tau}{2}u_{tt} + \frac{\tau^2}{6}u_{ttt} + g_x - \frac{h}{2}g_{xx} + \frac{h^2}{6}g_{xxx} + O(h^3, \tau^3).$$

Учитывая свойство решения уравнения $u_t = -f_x$, преобразуем R к виду

$$R = (-f - \frac{\tau}{2}f_t - \frac{\tau^2}{6}f_{tt} + g - \frac{h}{2}g_x + \frac{h^2}{6}g_{xx})_x + O(h^3, \tau^3). \quad (3)$$

За счет выбора функции g можно уничтожить часть слагаемых в погрешности (3). В самом деле, если положить

$$g = f + \frac{h}{2}f_x + \frac{\tau}{2}f_t, \quad (4)$$

то с точностью до величин 2-го порядка малости получим

$$R = -(\frac{\tau^2}{6}f_{tt} + \frac{h\tau}{4}f_{tx} + \frac{h^2}{12}f_{xx})_x + O(h^3, \tau^3). \quad (5)$$

Разность между g и f в (4) назовем поправкой к потоковой функции. Ошибку аппроксимации (5) можно записать в следующем виде

$$R = -(\frac{h}{2}(\frac{h}{6}f_x + \frac{\tau}{3}f_t)_x + \frac{\tau}{2}(\frac{h}{6}f_x + \frac{\tau}{3}f_t)_t)_x + O(h^3, \tau^3),$$

в котором присутствуют производные от поправок, но с другими коэффициентами. Это подсказывает способ выбора функции g в виде

$$g = f + \frac{h}{2}(f + \frac{h}{6}f_x + \frac{\tau}{3}f_t)_x + \frac{\tau}{2}(f + \frac{h}{6}f_x + \frac{\tau}{3}f_t)_t. \quad (6)$$

При подстановке (6) в (3) получим 3-й порядок малости ошибки аппроксимации

$$R = O(h^3, \tau^3).$$

Таким образом, схема (2) при потоковой функции g с двумя уровнями поправок

$$s = f + \frac{h}{6}f_x + \frac{\tau}{3}f_t, \quad g = f + \frac{h}{2}s_x + \frac{\tau}{2}s_t \quad (7)$$

будет с 3-м порядком по пространству и времени аппроксимировать уравнение (1).

Однако к схеме Годунова и ее модификациям, использующим точное решение задачи Римана, такой подход не применим. В корректной постановке задача Римана формулируется с исходными данными для функции u , а не для потоков f . Выясним, что будет, если двухуровневые поправки (7) применять не к f , а к аргументу функции $f(u)$. То есть вместо (7) применять

$$\tilde{u} = u + \frac{h}{6}u_x + \frac{\tau}{3}u_t, \quad \hat{u} = u + \frac{h}{2}\tilde{u}_x + \frac{\tau}{2}\tilde{u}_t, \quad g = f(\hat{u}). \quad (8)$$

Потоки g в (6) с поправками к f , которые обеспечивают 3-й порядок, после раскрытия скобок имеют вид:

$$g = f + \frac{h}{2}f_x + \frac{\tau}{2}f_t + \frac{h^2}{12}f_{xx} + \frac{\tau^2}{6}f_{tt} + \frac{h\tau}{4}f_{xt}. \quad (9)$$

Потоки в (8) с аналогичными поправками к аргументу потоковой функции

$$\hat{f} = f(u + p), \quad \text{где} \quad p = \frac{h}{2}u_x + \frac{\tau}{2}u_t + \frac{h^2}{12}u_{xx} + \frac{\tau^2}{6}u_{tt} + \frac{h\tau}{4}u_{xt}. \quad (10)$$

Найдем главный член их разности. Разложение (10) по степеням p до 2-го порядка малости включительно дает

$$\hat{f} = f(u + p) \approx f + f_u p + \frac{1}{2}f_{uu}p^2. \quad (11)$$

Распишем отдельные слагаемые, используя правила дифференцирования сложной функции $f(u(x, t))$. Линейное по p выражение приводится к виду

$$f_u p = \frac{h}{2}f_x + \frac{\tau}{2}f_t + \frac{h^2}{12}(f_{xx} - f_{ux}u_x) + \frac{\tau^2}{6}(f_{tt} - f_{ut}u_t) + \frac{h\tau}{4}(f_{xt} - f_{ux}u_t). \quad (12)$$

Квадратичное по p слагаемое с сохранением по h и τ только величин 2-го порядка приводится к виду

$$\frac{1}{2}f_{uu}p^2 \approx \frac{1}{2}f_{uu}\left(\frac{h}{2}u_x + \frac{\tau}{2}u_t\right)^2 = \frac{h^2}{8}f_{ux}u_x + \frac{\tau^2}{8}f_{ut}u_t + \frac{h\tau}{4}f_{ux}u_t. \quad (13)$$

Вычитая (11) из (9) с учетом (12) и (13), получим итоговый вид для разности

$$g - \hat{f} = -\frac{h^2}{24} J_x u_x + \frac{\tau^2}{24} J_t u_t + O(h^3, \tau^3), \quad (14)$$

где $J = f_u$. Очевидно, что различие будет лишь для нелинейных $f(u)$.

Для итоговой формулировки схемы 3-го порядка нужно указать способ вычисления поправок (8). Для этого достаточно выразить производные по времени в поправках через пространственные производные, используя свойство решения дифференциального уравнения $u_t = -J u_x$. Тогда вместо (8) получим

$$\tilde{u} = u + \frac{h}{6} u_x - \frac{\tau}{3} J(u) u_x, \quad \hat{u} = u + \frac{h}{2} \tilde{u}_x - \frac{\tau}{2} J(\tilde{u}) \tilde{u}_x. \quad (15)$$

Заметим, что \hat{u} в (8) и в (15) формально не совпадают, но несложно показать, что их разность является величиной 3-го порядка малости по h и τ .

На первом предварительном этапе используем (15) в разностной схеме

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\tau} + \frac{f(\hat{u}_i) - f(\hat{u}_{i-1})}{h} = 0. \quad (16)$$

Эта схема имеет 2-й порядок точности, так как в ней не учтены нелинейные поправки (14). Но этого достаточно, чтобы привлечь \bar{u} для вычисления производных по времени в нелинейных поправках.

На втором этапе вычисляем поправки (14) к потокам, например, по формулам

$$N_i = \frac{(J(\bar{u}_i) - J(u_i^n))(\bar{u}_i - u_i^n)}{24} - \frac{(J(u_{i+1}^n) - J(u_i^n))(u_{i+1}^n - u_i^n)}{24} \quad (17)$$

с последующим использованием схемы корректор с этими потоками:

$$\frac{u_i^{n+1} - \bar{u}_i}{\tau} + \frac{N_i - N_{i-1}}{h} = 0. \quad (18)$$

Формулы (15)–(18) описывают этапы одного шага для схемы Годунова 3-го порядка: предварительный шаг (16) с поправками 1-го и 2-го уровня (15) плюс шаг коррекции (18) с нелинейными поправками 3-го уровня (17).

2. Обобщение схемы для системы уравнений газовой динамики

Система дифференциальных уравнений, описывающих законы сохранения массы, импульса и энергии для нестационарного течения идеального совершенного газа в трубе постоянного сечения в одномерном приближении, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Здесь $\rho(x, t)$, $p(x, t)$, $v(x, t)$ — плотность, давление и скорость газа зависят от координаты x вдоль трубы и времени t . Полная энергия единицы объема газа $e = p(\gamma - 1)^{-1} + \rho v^2/2$ (для воздуха $\gamma = 1,4$). Вектор массовых переменных \mathbf{w} (плотность, импульс, энергия) используется для записи законов сохранения. Вектор традиционных переменных $\mathbf{u} = (\rho, p, v)$ обычно используется для ввода/вывода и анализа результатов.

Систему уравнений (19)–(20) можно записать с производными по времени от \mathbf{u}

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ p \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho \\ 0 & v & \gamma p \\ 0 & \rho^{-1} & v \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Пусть выбрана равномерная по x сетка, причем направление роста номеров ячеек i совпадает с направлением координаты x . Схема Годунова для системы (19) записывается в следующем виде:

$$\frac{\bar{\mathbf{w}}_i - \mathbf{w}_i}{\tau} + \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}})}{h} = 0, \quad (23)$$

где $\bar{\mathbf{w}}_i$ — вектор параметров в ячейке i в момент $t + \tau$. Величины с полуцелыми индексами представляют собой параметры на границах между ячейками. Они находятся из решения задачи Римана с условиями из прилегающих ячеек. В линейном приближении это решение имеет вид:

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{i+1}}{2} + \text{sign}(A_{i+\frac{1}{2}}) \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i+1}}{2}. \quad (24)$$

Коэффициенты матрицы A с полуцелыми индексами вычисляются по средним значениям параметров в соседних ячейках. Функция $\text{sign}(A)$ вычисляется через разложение

$$A = R \Lambda R^{-1} \Rightarrow \text{sign}(A) = R \text{sign}(\Lambda) R^{-1}, \quad (25)$$

где R и Λ — матрица собственных векторов и диагональная матрица собственных чисел матрицы A , $\text{sign}(\Lambda) = \text{diag}(\text{sign}(\lambda_1), \dots, \text{sign}(\lambda_m))$. Разложение (25) для (22) выглядит следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & 0 & c^2 \\ -c\rho^{-1} & 0 & c\rho^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v - c & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}c^{-2} & -\frac{1}{2}\rho c^{-1} \\ 1 & -c^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}c^{-2} & \frac{1}{2}\rho c^{-1} \end{bmatrix},$$

где квадрат скорости звука $c^2 = \gamma p / \rho$.

Для устойчивости явной схемы (23) необходимо соблюдать ограничение на шаг интегрирования по времени. За шаг τ волны Римана, распространяющиеся со скоростями, равными собственным числам матрицы A , не должны проходить расстояние больше размера ячейки. Отсюда вытекает соотношение

$$\tau = \nu \cdot \min_i \left(\frac{h}{|v_i| + c_i} \right), \quad (26)$$

где коэффициент ν , называемый числом Куранта — Фридрихса — Леви (CFL), должен быть меньше единицы ($\nu < 1$). В таком виде схема (23) имеет 1-й порядок аппроксимации.

Повышение порядка до 2-го в 1D-версии W-метода [1] осуществляется за счет поправок, позволяющих вычислить параметры на выходящих из ячеек характеристиках в момент $t + \tau/2$. Поправки α , вычисляемые на основе системы (21), должны по аналогии с (15) аппроксимировать следующее выражение

$$\alpha = \frac{h}{2} \text{sign}(A) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \frac{\tau}{2} A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + O(h^3).$$

Расчет параметров с поправками осуществляется с привлечением TVD-фильтров и разложения $A = R\Lambda R^{-1}$:

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i + R \left(\frac{1}{2} \text{sign}(\Lambda) - \frac{1}{2} \frac{\tau}{h} \Lambda \right) \text{mid}(\alpha_i^L, \alpha_i^R), \quad (27)$$

где $\text{mid}(a, b)$ — нелинейная функция выбора среднего из a и b , применяемая покомпонентно, а векторы левых и правых разностей α_i^L, α_i^R :

$$\alpha_i^L = R^{-1}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}), \quad \alpha_i^R = R^{-1}(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i).$$

Значения коэффициентов матриц в (27) вычисляем по параметрам той ячейки, в которой производится вычисление поправок. В качестве функции $\text{mid}(a, b)$ часто используют функцию гармонического среднего (с учетом знака) [7]:

$$\text{mid}(a, b) = \begin{cases} 2ab(a+b)^{-1}, & \text{if } ab > 0 \\ 0, & \text{if } ab \leq 0 \end{cases}. \quad (28)$$

В качестве функции $\text{mid}(a, b)$ можно использовать и другие более эффективные гладкие фильтры [2]. Для гарантированного обеспечения 2-го порядка аппроксимации по пространству и времени в областях монотонности параметров достаточно, чтобы функция $\text{mid}(a, b)$ при близких аргументах со 2-м порядком точности совпадала со средним арифметическим.

Вычисленные в каждой ячейке величины (27) используются в аргументах задачи Римана при вычислении параметров на границах ячеек (24)

$$\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_i + \hat{\mathbf{u}}_{i+1}}{2} + \text{sign}(\hat{A}_{i+\frac{1}{2}}) \frac{\hat{\mathbf{u}}_i - \hat{\mathbf{u}}_{i+1}}{2},$$

которые далее используются для вычисления потоков в схеме (23).

Схема 3-го порядка состоит из двух этапов. На первом этапе реализуется схема 2-го порядка, в которой величины $\hat{\mathbf{u}}$ также вычисляются по (27), но за две итерации согласно формулам (15): на первой итерации с коэффициентами 1/6 и 1/3, а на второй с коэффициентами 1/2.

Второй этап, учитывающий нелинейность системы уравнений, мало отличается от формул (17)–(18) скалярного случая. В нем вычисляются нелинейные поправки 2-го порядка малости к потокам

$$N_i = \frac{1}{24} (\bar{J}_i - J_i) (\bar{\mathbf{u}}_i - \mathbf{u}_i) - \frac{1}{24} (J_{i+1} - J_i) (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) \quad (29)$$

с последующим использованием их в схеме корректор:

$$\frac{\mathbf{w}_i^{n+1} - \bar{\mathbf{w}}_i}{\tau} + \frac{N_i - N_{i-1}}{h} = 0. \quad (30)$$

В (29) матрица производных J от потоков системы (19) по переменным $\mathbf{u} = (\rho, p, v)$ имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho \\ v^2 & 1 & 2\rho v \\ \frac{1}{2}v^3 & \frac{\gamma}{\gamma-1}v & \frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{3}{2}\rho v^2 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

В заключение раздела отметим, что нелинейные потоки, имеющие 2-й порядок малости, не влияют на линейное условие устойчивости (26). Используя тот же прием, что и для 1D-версии W-метода [1], можно показать, что схема первого этапа с двумя уровнями поправок устойчива и монотонна при том же условии (26), что и схема Годунова [3].

3. Результаты численного тестирования

В данном разделе представлены результаты по численной оценке порядка аппроксимации предложенной схемы. При этом используется очевидное свойство, что погрешность аппроксимации для явной разностной схемы представляет собой отношение ошибки решения, накапливаемой за один шаг, к величине шага по времени. В самом деле, пусть для уравнения с некоторым дифференциальным оператором $L(\mathbf{u})$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L(\mathbf{u}) = 0 \quad (32)$$

применяется разностная схема с некоторым разностным оператором $L_h(\mathbf{v})$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} + L_h(\mathbf{v}^n) = 0. \quad (33)$$

Точное решение \mathbf{u} дифференциального уравнения (32) не обязано удовлетворять разностной схеме (33). Результат подстановки точного решения \mathbf{u} в разностную схему и является по определению погрешностью аппроксимации R :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + L_h(\mathbf{u}^n) = R. \quad (34)$$

Если в разностную схему (33) вместо \mathbf{v}^n на момент времени t_n подставить точное решение \mathbf{u} и выполнить один шаг по времени, то получим приближенное \mathbf{v}^{n+1} на момент времени $t_n + \tau$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + L_h(\mathbf{u}^n) = 0. \quad (35)$$

Вычитая (35) из (34), получим

$$R = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}}{\tau}.$$

Теоретический анализ погрешности аппроксимации в первом разделе проводился в предположении гладкого решения. Поэтому и для корректной численной проверки теории нужно взять в качестве начального условия гладкое точное аналитическое решение, отличное от константы. Наиболее подходящим для этого является аналитическое решение, описывающее участок веера волны разрежения, которая возникает в задаче о распаде произвольного разрыва.

Для тестовой оценки порядка аппроксимации вычисление реальной погрешности проводилось на участке волны разрежения для газа с $\gamma = 1,4$ в задаче о распаде разрыва с параметрами:

$$(\rho, p, v)_L = (8, 8, 0); \quad (\rho, p, v)_R = (1, 1, 0).$$

Расчетная область $x \in [0; 1]$. В начальный момент времени $t = 0$ разрыв находился в точке с координатой $x = 0,7$. В качестве начальных условий для численных расчетов бралось развитое точное решение задачи на момент $t = 0,45$. Его график с участком волны разрежения изображен на рисунке.

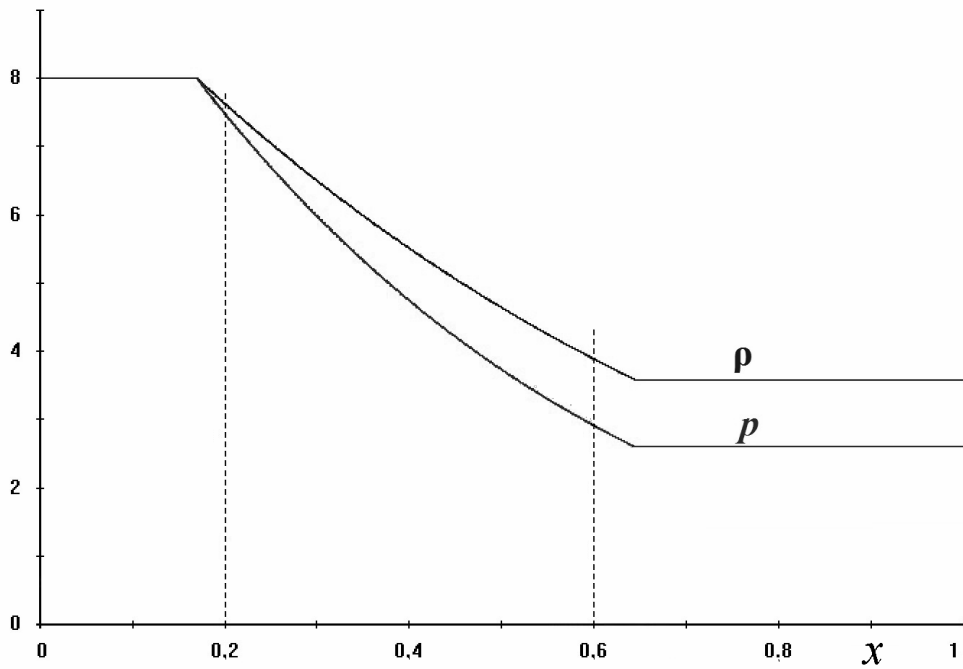


График точного решения с участком измерения ошибки аппроксимации

Погрешность аппроксимации R вычислялась для давления газа как средняя раз- деленная разность между точным p^* и численным решением \bar{p} на внутреннем участке волны разрежения $x \in [0,2; 0,6]$ за один шаг τ .

$$R = \frac{1}{m} \sum_i \frac{|\bar{p}_i - p_i^*|}{\tau}, \tag{36}$$

где m — количество ячеек сетки, попавших на участок измерений.

В расчетах варьировался размер расчетной сетки $N = 100, 200, 400, 800$ и число Куранта: CFL= 0,9 (вариант А) и CFL= 0,01 (вариант В). В таблице представлена

погрешность аппроксимации для четырех методов: метод Годунова 1-го порядка, SPH-TVD метод [4], 1D-версия W-метода [1] 2-го порядка и описанный выше метод 3-го порядка, именованный как Годунов-3. Для каждой сетки с $N \geq 200$ и каждого метода в таблице приведен коэффициент k , равный отношению погрешности на предыдущей сетке к текущей. По этому коэффициенту можно оценивать реальный порядок аппроксимации метода в конкретной реализации.

Ошибки аппроксимации методов

Сетка N	Годунов-1, $O(h, \tau)$	k	SPH-TVD, $O(h^2, \tau)$	k	W-метод, $O(h^2, \tau^2)$	k	Годунов-3, $O(h^3, \tau^3)$	k
А) CFL= 0,9								
100	$1,052 \cdot 10^{-1}$		$1,851 \cdot 10^{-2}$		$4,629 \cdot 10^{-4}$		$7,252 \cdot 10^{-6}$	
200	$5,286 \cdot 10^{-2}$	2,0	$9,232 \cdot 10^{-3}$	2,0	$1,158 \cdot 10^{-4}$	4,0	$9,109 \cdot 10^{-7}$	8,0
400	$2,649 \cdot 10^{-2}$	2,0	$4,610 \cdot 10^{-3}$	2,0	$2,896 \cdot 10^{-5}$	4,0	$1,142 \cdot 10^{-7}$	8,0
800	$1,326 \cdot 10^{-2}$	2,0	$2,303 \cdot 10^{-3}$	2,0	$7,242 \cdot 10^{-6}$	4,0	$1,429 \cdot 10^{-8}$	8,0
В) CFL= 0,01								
100	$2,314 \cdot 10^{-1}$		$1,976 \cdot 10^{-3}$		$2,589 \cdot 10^{-4}$		$3,633 \cdot 10^{-7}$	
200	$1,165 \cdot 10^{-1}$	2,0	$4,841 \cdot 10^{-4}$	4,1	$6,437 \cdot 10^{-5}$	4,0	$4,171 \cdot 10^{-8}$	8,7
400	$5,844 \cdot 10^{-2}$	2,0	$1,145 \cdot 10^{-4}$	4,2	$1,605 \cdot 10^{-5}$	4,0	$5,004 \cdot 10^{-9}$	8,3
800	$2,927 \cdot 10^{-2}$	2,0	$3,344 \cdot 10^{-5}$	3,4	$4,006 \cdot 10^{-6}$	4,0	$6,060 \cdot 10^{-10}$	8,3

В первой части таблицы (вариант А) базовый метод Годунова и метод SPH-TVD демонстрируют 1-й порядок аппроксимации, так как при уменьшении шага сетки в 2 раза ошибка аппроксимации также уменьшается в 2 раза, хотя по абсолютной величине ошибка у 2-го приблизительно в 5 раз меньше. W-метод показывает 2-й порядок аппроксимации. Для вышеописанной модификации метода Годунова (последняя колонка) при удвоении сетки ошибка уменьшается в 8 раз, то есть достаточно точно выдерживается 3-й порядок аппроксимации.

Во второй части таблицы (вариант В) шаг по времени τ почти на 2 порядка меньше, чем в варианте А. В этом случае основной вклад в ошибку аппроксимации вносит ошибка по пространству. Видно, что ошибка метода Годунова 1-го порядка увеличилась почти в 2 раза. Это подтверждает известный факт, что ошибки по h и по τ в методах 1-го порядка имеют разные знаки. Метод SPH-TVD в этом варианте ведет себя как метод 2-го порядка, причем при $N = 800$ порядок снижается. Это означает, что порядок аппроксимации метода SPH-TVD по h и τ разный, ошибка ведет себя как $O(h^2, \tau)$. Для W-метода 2-й порядок аппроксимации полностью сохранился, причем сама ошибка по сравнению с вариантом А уменьшилась приблизительно в 2 раза. Для новой модификации метода Годунова 3-й порядок выдерживается даже с некоторым запасом. Отметим, что величина ошибки в варианте В уменьшилась более чем в 20 раз по сравнению с вариантом А. Это означает, что у метода 3-го порядка в ошибке аппроксимации для варианта А данного теста преобладает ошибка по τ .

В заключение параграфа отметим, что в данных тестах способ решения задачи Римана (точное решение или приближенное по формуле (24)) на порядок аппроксимации методов влияния не оказывал. В то же время замена TVD-фильтра (28) на более силь-

ный кусочно линейный фильтр *minmod* приводило к тому, что порядок аппроксимации метода 3-го порядка снижался до 2-го.

Заключение

Представлена новая версия модификации метода Годунова для нестационарных одномерных уравнений газовой динамики. Метод имеет 3-й порядок аппроксимации по пространству и времени и является развитием W-метода 2-го порядка [1] за счет подключения двух отдельных блоков коррекции. Первый блок повышает аппроксимацию для линейных систем уравнений, а 2-й устраняет погрешность 2-го порядка, возникающую из-за нелинейности уравнений. Проведено теоретическое построение и обоснование метода 3-го порядка на примере скалярного уравнения. Описана процедура нового теста для оценки реального порядка аппроксимации разностных схем на точном решении внутри веера волны разрежения, возникающей при распаде газодинамического разрыва. Проведенное сравнение экспериментальной величины ошибки аппроксимации для нескольких методов свидетельствует о высокой чувствительности теста и подтверждает 3-й порядок аппроксимации нового метода. Предложенный подход построения разностных схем 3-го порядка может быть использован для неоднородных и двумерных гиперболических систем нелинейных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Е. И. W-модификация метода С.К. Годунова и ее применение для двумерных нестационарных течений запыленного газа / Е. И. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 122–135.
2. Васильев, Е. И. W-модификация метода Годунова и ее приложения в моделировании газодинамических течений с ударными волнами : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Васильев Евгений Иванович. — Волгоград, 1999. — 213 с.
3. Годунов, С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений газовой динамики / С. К. Годунов // Матем. сб. — 1959. — Т. 47 (89), № 3. — С. 271–306.
4. Численная схема CSPH-TVD: исследование влияния ограничителей наклонов / А. В. Белоусов, М. Н. Кузмин, Т. С. Шушкевич, С. С. Храпов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2014. — № 1 (20). — С. 22–34.
5. Bianco, F. High-order central schemes for hyperbolic systems of conservation laws / F. Bianco, G. Puppo, G. Russo // SIAM J. Sci. Comput. — 1999. — Vol. 21, № 1. — P. 294–322.
6. Kurganov, A. A Third-Order Semidiscrete Central Scheme for Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations / A. Kurganov, D. Levy // SIAM J. Sci. Comput. — 2000. — Vol. 22, № 4. — P. 1461–1488.
7. van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method / B. van Leer // J. Comput. Phys. — 1979. — Vol. 32. — P. 101–136.
8. Levy, D. Relaxed High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws / D. Levy, S. Bryson // J. of Scientific Computing. — 2006. — Vol. 27, № 1. — P. 163–175.
9. McCorquodale, P. A high-order finite-volume method for conservation laws on locally refined grids / P. McCorquodale, P. Colella // Comm. App. Math. and Comp. Sci. — 2011. — Vol. 6, № 1. — P. 1–25.

REFERENCES

1. Vasil'ev E.I. W-modifikatsiya metoda S.K. Godunova i ee primeneniye dlya dvumernykh nestatsionarnykh techeniy zapyennogo gaza [W-Modification of Godunov's Method and Its Application to Two-Dimensional Non-Stationary Flows of a Dusty Gas]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1996, vol. 36, no. 1, pp. 122-135.
2. Vasilyev E.I. *W-modifikatsiya metoda Godunova i ee prilozheniya v modelirovanii gazodinamicheskikh techeniy s udarnymi volnami: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [W-Modification of Godunov's Method and Its Application to Modeling of Gas-Dynamic Flows with Shock Waves. Doctor Dissertation]. Volgograd, 1999. 213 p.
3. Godunov S.K. Raznostnyy metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy uravneniy gazovoy dinamiki [A Difference Method for the Numerical Calculation of Discontinuous Solutions of the Equations of Hydrodynamics]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 1959, vol. 47 (89), no. 3, pp. 271-306.
4. Belousov A.V., Kuzmin M.N., Shushkevich T.S., Khrapov S.S. Chislennaya skhema CSPH-TVD: issledovanie vliyaniya ogranichiteley naklonov [The Numerical Scheme of CSPH-TVD: the Study of the Effect of Slope Stops]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2014, no. 1 (20), pp. 22-34.
5. Bianco F., Puppo G., Russo G. High-Order Central Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1999, vol. 21, no. 1, pp. 294-322.
6. Kurganov A., Levy D. A Third-Order Semidiscrete Central Scheme for Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2000, vol. 22, no. 4, pp. 1461-1488.
7. van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method. *J. Comput. Phys.*, 1979, vol. 32, pp. 101-136.
8. Levy D., Bryson S. Relaxed High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. of Scientific Computing*, 2006, vol. 27, no. 1, pp. 163-175.
9. McCorquodale P., Colella P. A High-Order Finite-Volume Method for Conservation Laws on Locally Refined Grids. *Comm. App. Math. and Comp. Sci.*, 2011, vol. 6, no. 1, pp. 1-25.

THE THIRD-ORDER APPROXIMATION GODUNOV METHOD FOR THE EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

Eugene Ivanovich Vasilev

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Fundamental Informatics and Optimal Control,
Volgograd State University
vasilev@volsu.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Tatiana Anatolievna Vasileva

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Fundamental Informatics and Optimal Control,
Volgograd State University
vasilevaTA@volsu.ru, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Dmitriy Igorevich Kolybelkin

Student, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control,
Volgograd State University
cptn.cook11@gmail.com, fiou@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Boris Krasovitev

Ph.D., Senior Researcher, Department of Mechanical Engineering,
the Pearlstone Center for Aeronautical Engineering Studies,
Ben-Gurion University of the Negev
borisk@bgu.ac.il
P. O. Box 653, 84105 Beer-Sheva, Israel

Abstract. The paper suggests a new modification of Godunov difference method with the 3rd order approximation in space and time for hyperbolic systems of conservation laws. The difference scheme uses the simultaneous discretization of the equations in space and time without of Runge — Kutta stages. An exact or approximate solution of Riemann problem is applied to calculate numerical fluxes between cells. Before the time step, corrections to the arguments of the Riemann problem providing third-order approximations for linear systems are calculated. After the time step, the numerical solution correction procedure is applied to eliminate the second-order error arising from the nonlinearity of the equations. The paper presents the results of experimental numerical verification of the method approximation order on the exact smooth solution inside the fan of the expansion wave. The test results completely confirm the third order of the presented method. The proposed approach of constructing third-order difference schemes can be used for inhomogeneous and two-dimensional hyperbolic systems of nonlinear equations.

Key words: nonlinear hyperbolic systems, Godunov method, third order, approximation, construction of difference schemes.