DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.1.3

УДК 517.518.68
ББК 22.161.5

# О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ НЕКОТОРЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ФУРЬЕ

**Юсуфали Хасанович Хасанов**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и информационных систем,
Российско-таджикский (славянский) университет
yukhas60@mail.ru
ул. М. Турсунзаде, 30, 734025 г. Душанбе, Республика Таджикистан

**Аннотация.** В работе исследуется поведение отклонений функций двух переменных $f(x, y)$, заданных на всем двумерном пространстве от интегральных средних их преобразований Фурье

$$U_{\sigma,r}(f; x, y) = \int\limits_0^{\sigma} \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) S^*_{u,u}(f; x, y) du$$

в метрике пространства $L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$, то есть изучается порядок поведения величины

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \|f(x, y) - U_{\sigma,r}(f; x, y)\|_{L_p}$$

в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения заданной функции целыми функциями ограниченной степени. Установлены оценки сверху и снизу величины $U_{\sigma,r}(f; x, y)$ через модули непрерывности, характеризующие структурные свойства рассматриваемой функции $f(x, y)$.

**Ключевые слова:** функции двух переменных, ряд Фурье, преобразование Фурье, частичные суммы ряда Фурье, интегральные средние, целая функция конечной степени, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

## Введение

Через $L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$ обозначим пространство измеримых функций $f(x,y)$, для которых

$$\|f(x,y)\|_{L_p} = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^p dxdy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f(x,y)\|_{L_\infty} = vrai \sup_{x,y} |f(x,y)| < \infty,$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}(x,y),$$

является рядом Фурье функции $f(x,y) \in L_p$, $(1 \le p \le \infty)$, где

$$A_{k,l}(x,y) = a_{k,l} \cos kx \cos ly + b_{k,l} \sin kx \cos ly + c_{k,l} \cos kx \sin ly + d_{k,l} \sin kx \sin ly,$$

$a_{k,l}$, $b_{k,l}$, $c_{k,l}$, $d_{k,l}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$, а

$$A_{k,0}(x,y) = \frac{1}{2}(a_{k,0} \cos kx + b_{k,0} \sin kx), \quad A_{0,l}(x,y) = \frac{1}{2}(a_{0,l} \cos ly + c_{0,l} \sin ly), \quad A_{0,0} = \frac{1}{4} a_{0,0}.$$

Пусть почти всюду существует преобразование Фурье

$$F(t,z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u,v) \exp(-i(tu + zv)) dudv,$$

где

$$F(t,z) \in L_q(R^2), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для всякого $\sigma > 0$ рассмотрим

$$S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(t,z) \exp(i(tx + zy)) dtdz =$$

$$= \int\limits_{0}^{\sigma} \left\{ \int\limits_{-u}^{u} A(t,u)dt + \int\limits_{-u}^{u} A(t,-u)dt + \int\limits_{-u}^{u} A(u,z)dz + \int\limits_{-u}^{u} A(-u,z)dz \right\} du =$$

$$= \int\limits_{0}^{\sigma} S^*_{u,u}(f;x,y) du. \tag{1}$$

### Основные результаты

В работе нами исследуются поведения отклонений функций двух переменных $f(x,y)$, заданных на всем двумерном пространстве от интегральных средних их преобразований Фурье в метрике пространства $L_p(R^2)$, $1 \le p < \infty$, то есть будем изучать порядок поведения величины

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p}, \qquad (2)$$

где

$$U_{\sigma,r}(f;x,y) = \int\limits_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) S^*_{u,u}(f;x,y)du.$$

**Теорема 1.** *Если $f(x,y) \in L_p(R^2)$ $(1 < p \le 2)$, то справедлива оценка*

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} \le C_{p,r}\left\{\omega_r^{(1)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} + \omega_r^{(2)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p}\right\},$$

*где*

$$\omega_r^{(1)}(f;u)_{L_p} = \sup_{|h|\le u}\|\Delta^r_{x,h}f\|_{L_p} = \sup_{|h|\le u}\left\|\sum_{\nu=0}^r(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}f(x+\nu h,y)\right\|_{L_p},$$

$$\omega_r^{(2)}(f;u)_{L_p} = \sup_{|h|\le u}\|\Delta^r_{h,y}f\|_{L_p} = \sup_{|h|\le u}\left\|\sum_{\nu=0}^r(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}f(x,y+\nu h)\right\|_{L_p},$$

*$C_{p,r}$ — константа, зависящая лишь от $p$ и $r$.*

**Теорема 2.** *В предположениях теоремы 1 при $1 < p \le 2$ имеет место следующая оценка*

$$\omega_r^{(\nu)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} \le M_{p,r}R_{\sigma,r}(f)_{L_p}, \quad \nu = 1,2,$$

*где константа $M_{p,r}$ зависит от $p$ и $r$.*

Из теоремы 1 и 2 вытекает, что в предложениях теоремы 1 в случае, когда $1 < p \le$ $\le 2$, при любом натуральном $r$ справедливо следующее порядковое равенство

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} \asymp \omega_r^{(1)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} + \omega_r^{(2)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p}.$$

Заметим, что при $p = \infty$ и $r = 1$ аналогичная задача рассматривалась в работе [3], для случая периодических функций в работе [5].

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** *Пусть функция $f(x,y) \in L_p(R^2)$ $(1 < p < \infty)$ имеет преобразование Фурье*

$$F(x,y) \in L_q(R^2), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*а $A_{\sigma,\sigma}(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x,y)$ целыми функциями $Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)$ степени не выше $\sigma$, то есть нижняя грань*

$$A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p} = \inf_{Q_{\sigma,\sigma}}\|f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p}.$$

*Тогда справедлива следующая оценка*

$$\left\| f(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv \right\|_{L_p} \le C_p A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p}. \tag{3}$$

***Доказательство.*** Пусть $Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y) \in L_p(R^2)$ есть целая функция степени не выше $\sigma$, осуществляющая наилучшее приближение порядка $\sigma$ функции $f(x,y)$ в метрике пространства $L_p(R^2)$, $1 < p < \infty$, то есть

$$\|f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} = A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p}.$$

При $1 < p \le 2$, $Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y) \in L_2(R^2)$ и по теореме Винера — Пели (см. [1, с. 179])

$$Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} g(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv, \tag{4}$$

где $g(u,v)$ — преобразование Фурье функции $Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)$.

Известна оценка (см. [6, с. 771])

$$\|S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} \le B_p\|f(x,y)\|_{L_p}.$$

Отсюда, применяя неравенство Минковского, в силу (4) получим

$$\|f(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv\|_{L_p} \le$$

$$\le \|f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} + \left\| \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} [g(u,v) - F(u,v)]\exp(i(ux+vy))dudv \right\|_{L_p} \le$$

$$\le B_p\|f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} = B_p A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p},$$

где $B_p$ — константа, зависящая от $p$.

Если же $2 < p < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ функция

$$G_\varepsilon(f;x,y) = Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\frac{\sin\varepsilon x}{\varepsilon x}\cdot\frac{\sin\varepsilon y}{\varepsilon y} \in L_2,$$

и, следовательно, она представима интегралом

$$G_\varepsilon(f;x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} g_\varepsilon(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv,$$

где $g_\varepsilon(u,v)$ — преобразование Фурье функции $G_\varepsilon(f;x,y)$. Поэтому

$$\left\| f(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} F(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv \right\|_{L_p} \le$$

$$\leq \left\| f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}\cdot\frac{\sin \varepsilon y}{\varepsilon y}\right\|_{L_p} +$$

$$+\left\| \int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} F(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv - \int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} g_\varepsilon(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv\right\|_{L_p} \leq$$

$$\leq \left\| f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}\cdot\frac{\sin \varepsilon y}{\varepsilon y}\right\|_{L_p} \leq$$

$$\leq \|f(x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} + \left\| Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y) - Q_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}\cdot\frac{\sin \varepsilon y}{\varepsilon y}\right\|_{L_p}.$$

Выбрав $\varepsilon$ достаточно малым и пользуясь теоремой Фату (см. [2, с. 38]), можно обеспечить, чтобы второе слагаемое в правой части последнего неравенства стало меньше первого. Тогда получим, что

$$\left\| f(x,y) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon}\int\limits_{-\sigma-\varepsilon}^{\sigma+\varepsilon} F(u,v)\exp(i(ux+vy))dudv\right\|_{L_p} \leq B_p A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p}.$$

Отсюда следует неравенство (3) и лемма доказана.

## Доказательство основных результатов

*Доказательство теоремы 1.* Пусть

$$S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(t,z)\exp(i(tx+zy))dtdz = \int\limits_{0}^{\sigma}\left\{\int\limits_{-u}^{u} F(t,u)\exp(i(tx+uy))dt\right\}du.$$

Тогда в силу (1) будем иметь

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial x^r}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\right| = \left|\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(t,z)t^r i^r\exp(itx)\exp(izy)dtdz\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{0}^{\sigma}\left[\int\limits_{-u}^{u} F(t,u)t^r\exp(itx)\exp(iuy)dt + \int\limits_{-u}^{u} F(t,-u)t^r\exp(itx)\exp(-iuy)dt +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{-u}^{u} F(u,z)u^r\exp(iux)\exp(izy)dz + \int\limits_{-u}^{u} F(-u,z)u^r\exp(-iux)\exp(izy)dz\right]du\right|.$$

Аналогично по переменному $y$ получим

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial y^r}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\right| = \left|\int\limits_{0}^{\sigma}\left[\int\limits_{-u}^{u} F(t,u)u^r\exp(itx)\exp(iuy)dt +\right.\right.$$

$$+\int\limits_{-u}^{u} F(t,-u)u^r \exp(itx)\exp(-iuy)dt + \int\limits_{-u}^{u} F(u,z)z^r \exp(iux)\exp(izy)dz +$$

$$\left. + \int\limits_{-u}^{u} F(-u,z)z^r \exp(-iux)\exp(izy)dz \Bigg] du \right| .$$

Так как в силу доказанной леммы справедливо

$$\|f(x,y) - S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} \le C_p A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p} \ \ (1 < p < \infty),$$

то применяя неравенства Минковского, получим

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} \le \|f(x,y) - S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} +$$
$$+ \|S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} \le C_p A_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p} + R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p}. \quad (5)$$

Очевидно, что

$$R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p} = \|S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} = \left\| \frac{1}{\sigma^r} \int\limits_0^{\sigma} u^r S^*_{u,u}(f;x,y)du \right\|_{L_p} = \quad (6)$$

$$= \left\| \frac{1}{\sigma^r} \int\limits_0^{\sigma} \left[ \int\limits_{-u}^{u} t^r A(t,u)dt + \int\limits_{-u}^{u} t^r A(t,-u)dt + \int\limits_{-u}^{u} z^r A(u,z)dz + \int\limits_{-u}^{u} z^r A(-u,z)dz \right] du \right\|_{L_p}.$$

Определим функцию $\lambda(t,z)$ следующим образом

$$\lambda(t,z) = \begin{cases} \frac{t^r}{t^r+z^r}, & t > z; \\ \frac{z^r}{t^r+z^r}, & t \le z. \end{cases}$$

Тогда соотношение (6) принимает следующий вид

$$R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p} = \frac{1}{\sigma^r} \Bigg\| \int\limits_0^{\sigma} \Bigg[ \int\limits_{-u}^{u} \lambda(t,u)(t^r+u^r)A(t,u)dt + \int\limits_{-u}^{u} \lambda(t,u)(t^r+u^r)A(t,-u)dt +$$

$$+ \int\limits_{-u}^{u} \lambda(u,z)(u^r+z^r)A(u,z)dz + \int\limits_{-u}^{u} \lambda(u,z)(u^r+z^r)A(-u,z)dz \Bigg] du \Bigg\|_{L_p}.$$

Пусть

$$\lambda_1(t,z) = \frac{t^r}{t^r+z^r}, \ \ \lambda_2(t,z) = \frac{z^r}{t^r+z^r}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \lambda_1(t,z)}{\partial t} = \frac{r(tz)^r}{t(t^r+z^r)^2}, \ \ \frac{\partial \lambda_1(t,z)}{\partial z} = -\frac{r(tz)^r}{z(t^r+z^r)^2};$$

$$\frac{\partial \lambda_2(t,z)}{\partial t} = -\frac{r(tz)^r}{t(t^r+z^r)^2}, \ \ \frac{\partial \lambda_2(t,z)}{\partial z} = \frac{r(tz)^r}{z(t^r+z^r)^2};$$

$$\frac{\partial^2\lambda_1(t,z)}{\partial t\partial z} = \frac{r^2(tz)^r(t^r - z^r)}{tz(t^r + z^r)^3}, \ \ (0 \le z \le t);$$

$$\frac{\partial^2\lambda_2(t,z)}{\partial t\partial z} = \frac{r^2(tz)^r(z^r - t^r)}{tz(t^r + z^r)^3}, \ \ (0 \le t \le z).$$

Далее очевидно, что

$$\left|t\frac{\partial\lambda_1(t,z)}{\partial t}\right| \le m_{11}, \quad \left|z\frac{\partial\lambda_1(t,z)}{\partial z}\right| \le m_{12}, \quad \left|t\frac{\partial\lambda_2(t,z)}{\partial t}\right| \le m_{21}, \quad \left|z\frac{\partial\lambda_2(t,z)}{\partial z}\right| \le m_{22}$$

и

$$\left|tz\frac{\partial^2\lambda_1(t,z)}{\partial t\partial z}\right| \le M_1, \quad \left|tz\frac{\partial^2\lambda_2(t,z)}{\partial t\partial z}\right| \le M_2.$$

Поэтому, применяя известную теорему о мультипликаторах в непериодическом случае (см. [2, с. 69]), получим

$$R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p} = \frac{C_p}{\sigma^r}\left\|\int\limits_0^\sigma\left[\int\limits_{-u}^u(t^r+u^r)A(t,u)dt + \int\limits_{-u}^u(t^r+u^r)A(t,-u)dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{-u}^u(u^r+z^r)A(u,z)dz + \int\limits_{-u}^u(u^r+z^r)A(-u,z)dz\right]du\right\|_{L_p}.$$

Следовательно, при $1 < p < \infty$ будем иметь

$$R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p} \le \frac{C_p}{\sigma^r}\left[\left\|\frac{\partial^r}{\partial x^r}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\right\|_{L_p} + \left\|\frac{\partial^r}{\partial y^r}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\right\|_{L_p}\right].$$

После применения оценки С.М. Никольского для норм частных производных целой функции при $0 < h < \sigma^{-1}$ (см. [4, с. 232]), находим, что

$$R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p} \le \frac{C_p}{\sigma^r}(\frac{\sigma}{2})^r\left[\|\Delta^r_{h,x}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} + \|\Delta^r_{h,y}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p}\right]. \tag{7}$$

Так как при $1 < p < \infty$

$$\|\Delta^r_{h,x}S_{\sigma,\sigma}(f;x,y)\|_{L_p} \le M_p\|\Delta^r_{h,x}f(x,y)\|_{L_p},$$

то из (7) получим

$$R_{\sigma,r}(S_{\sigma,\sigma})_{L_p} \le C_{r,p}\left[\omega_r^{(1)}(f;\sigma^{-1})_{L_p} + \omega_r^{(2)}(f;\sigma^{-1})_{L_p}\right]. \tag{8}$$

Отсюда из соотношений (5), (8) и неравенства (см. [4, с. 294])

$$E_{\sigma,\sigma}(f)_{L_p} \le C_r\left[\omega_r^{(1)}(f;\sigma^{-1})_{L_p} + \omega_r^{(2)}(f;\sigma^{-1})_{L_p}\right]$$

получим утверждение теоремы 1.

*Доказательство теоремы 2.* Докажем первую часть теоремы, то есть справедливость оценки сверху модуля непрерывности равномерно по $y$ величиной (2)

$$\omega_r^{(1)}(f;\frac{1}{\sigma})_{L_p} \leq M_{p,r} R_{\sigma,r}(f)_{L_p}, \tag{9}$$

где

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} = \frac{1}{\sigma^r}\int\limits_0^\sigma u^r S^*_{u,u}(f;x,y)du. \tag{10}$$

Пусть $0 < h < \frac{1}{\sigma}$. Тогда

$$\|\Delta^r_{h,x} f(x,y)\|_{L_p} = \|\Delta^r_{h,x} f(x,y) - \Delta^r_{h,x} U_{\sigma,r}(f;x,y) + \Delta^r_{h,x} U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} \leq$$
$$\leq \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} + \|\Delta^r_{h,x} U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p}. \tag{11}$$

Принимая во внимание (2) и (10), при $1 < p < \infty$ имеем

$$\|\Delta^r_{h,x} U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} \leq h^r \|\frac{\partial^r}{\partial x^r} U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} =$$

$$= h^r \left\| \int\limits_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) u^r S^*_{u,u}(f;x,y)du \right\|_{L_p} \leq \frac{M_p}{\sigma^r} \left\| \int\limits_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) u^r S^*_{u,u}(f;x,y)du \right\|_{L_p} =$$

$$= M_p \left\| \int\limits_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) S^*_{u,u}(f;x,y)du - \int\limits_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right)^2 S^*_{u,u}(f;x,y)du \right\|_{L_p} =$$

$$= M_p \|U_{\sigma,r}(f;x,y) - U_{\sigma,r}[U_{\sigma,r}(f;x,y)]\|_{L_p}.$$

Отсюда

$$\|\Delta^r_{h,x} U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} \leq C_p L_{\sigma,r} \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p},$$

где

$$L_{\sigma,r} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| 4\int\limits_0^\sigma \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) \left[\cos ut \frac{\sin uz}{z} + \cos uz \frac{\sin ut}{t}\right] du \right| dtdz.$$

Интегрируя по частям, получим

$$L_{\sigma,r} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| 4 \frac{\sin \sigma t \cdot \sin \sigma z}{tz} \right| dtdz < \infty.$$

Тогда

$$\|\Delta^r_{h,x} U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p} \leq C_{p,r} \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p}.$$

Благодаря (11) получим оценку (9).

Аналогично устанавливается вторая часть теоремы.

Полученные результаты устанавливают в терминах модулей гладкости точный порядок стремления к нулю рассматриваемых отклонений.

В заключение заметим, что теоремы 1 и 2 ранее без доказательства приведены в работе автора [7].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер, Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. — М. : Наука, 1965. — 323 с.

2. Никольский, С. М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М. : Наука, 1969. — 456 с.

3. Пономаренко, В. Г. О приближении функций, равномерно непрерывных на всей вещественной плоскости / В. Г. Пономаренко // Сиб. мат. журн. — 1975. — Т. 16, № 1. — С. 86–97.

4. Тиман, А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. — М. : ГИФМЛ, 1960. — 624 с.

5. Тиман, М. Ф. О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича / М. Ф. Тиман, В. Г. Пономаренко // Известия вузов. Математика. — 1975. — № 9. — С. 59–67.

6. Hill, E. On the theory of Fourier transform / E. Hill, J. Tamarkin // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — № 39. — P. 768–774.

7. Khasanov, Yu. Kh. Approximation of almost periodic functions of two variables / Yu. Kh. Khasanov // Russian Mathematics (Iz vuz). — 2010. — Vol. 54, № 12. — P. 72–75.

## REFERENCES

1. Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii* [Lectures on Theories of Aproximations]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 323 p.

2. Nikolskiy S.M. *Priblizheniya funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximations of the Functions of Many Variables and Embedding Theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 456 p.

3. Ponomarenko V.G. O priblizhenii funktsiy, ravnomerno nepreryvnykh na vsey veshchestvennoy ploskosti [On Approximation of the Functions Uniformly Continuous over the Entire Real Plane]. *Sib. mat. zhurn.* [Siberian Mathematical Journal], 1975, vol. 16, no. 1, pp. 86-97.

4. Timan A.F. *Teoriya priblizheniya funktsiy deystvitelnogo peremennogo* [Theory of Approximation of the Functions of Real Variable]. Moscow, GIFML Publ., 1960. 624 p.

5. Timan M.F., Ponomarenko V.G. O priblizhenii periodicheskikh funktsiy dvukh peremennykh summami tipa Martsinkevicha [On Approximation of Periodic Functions of Two Variable Sums of Marcinkiewicz Type]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1975, no. 9, pp. 59-67.

6. Hill E., Tamarkin J. On the Theory of Fourier Transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, no. 39, pp. 768-774.

7. Khasanov Yu.Kh. Approximation of Almost Periodic Functions of Two Variables. *Russian Mathematics (Iz vuz)*, 2010, vol. 54, no. 12, pp. 72-75.

# ON APPROXIMATION OF THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES BY SOME FOURIER INTEGRALS

**Yusufali Khasanovich Khasanov**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Informatics and Information Systems,
Russian and Tajik Slavonic University
yukhas60@mail.ru
M. Tursunzoda St., 30, 734025 Dushanbe, Republic of Tajikistan

**Abstract.** This paper we studies some issues on the deviation of the functions of two variables $f(x,y)$ defined on the whole two-dimensional space from integral mean values of their Fourier transforms in the metric of the space $L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$.

Let $L_p(R^2)$ $(1 \le p < \infty)$ stand for the space of measurable functions $f(x,y)$ such that

$$\|f(x,y)\|_{L_p} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^p dxdy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \ \ (1 \le p < \infty),$$

$$\|f(x,y)\|_{L_\infty} = vrai \sup_{x,y} |f(x,y)| < \infty,$$

and almost everywhere there exists the Fourier transform

$$F(t,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v) \exp(-i(tu+zv)) dudv,$$

where

$$F(t,z) \in L_q(R^2) \ \ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

For any $\sigma > 0$ we consider

$$S_{\sigma,\sigma}(f;x,y) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(t,z) \exp(i(tx+zy)) dtdz =$$

$$= \int_0^{\sigma} \left\{ \int_{-u}^{u} A(t,u)dt + \int_{-u}^{u} A(t,-u)dt + \int_{-u}^{u} A(u,z)dz + \int_{-u}^{u} A(-u,z)dz \right\} du =$$

$$= \int_0^{\sigma} S^*_{u,u}(f;x,y)du,$$

where $A(t,z) = F(t,z)\exp(i(tx+zy))$.

This paper estimates the value

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} = \|f(x,y) - U_{\sigma,r}(f;x,y)\|_{L_p},$$

where

$$U_{\sigma,r}(f;x,y) = \int\limits_0^{\sigma} \left(1 - \frac{u^r}{\sigma^r}\right) S^*_{u,u}(f;x,y)du.$$

**Theorem 1.** If $f(x,y) \in L_p(R^2)$ $(1 < p \leq 2)$, then the following bound is valid

$$R_{\sigma,r}(f)_{L_p} \leq C_{p,r} \left\{ \omega_r^{(1)}(f; \frac{1}{\sigma})_{L_p} + \omega_r^{(2)}(f; \frac{1}{\sigma})_{L_p} \right\},$$

where

$$\omega_r^{(1)}(f;u)_{L_p} = \sup_{|h| \leq u} \|\Delta^r_{x,h} f\|_{L_p} = \sup_{|h| \leq u} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \tbinom{r}{\nu} f(x + \nu h, y) \right\|_{L_p},$$

$$\omega_r^{(2)}(f;u)_{L_p} = \sup_{|h| \leq u} \|\Delta^r_{h,y} f\|_{L_p} = \sup_{|h| \leq u} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \tbinom{r}{\nu} f(x, y + \nu h) \right\|_{L_p},$$

$C_{p,r}$ is a constant value that depends only on $p$ and $r$.

**Theorem 2.** Under the assumptions of Theorem 1 with $1 < p \leq 2$ the following bound is valid

$$\omega_r^{(\nu)}(f; \frac{1}{\sigma})_{L_p} \leq M_{p,r} R_{\sigma,r}(f)_{L_p} \quad (\nu = 1, 2),$$

where the constant $M_{p,r}$ depends only on $p$ and $r$.

**Key words:** function of two variables, Fourier series, Fourier transformation, partial sums of Fourier series, integral mean values, entire function of finite order, best approximation, modulus of continuity.