DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.1.2

УДК 519.213.2; 517.53
ББК 22.171

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ФОРМЕ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В СЛУЧАЕ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Виталий Николаевич Соболев

Кандидат физико-математических наук, свободный исследователь
sobolev_vn@mail.ru
г. Звенигород, Российская Федерация

Аннотация. В работе получены новые явные оценки точности аппроксимаций в центральной предельной теореме для независимых одинаково распределенных случайных величин. Случайные величины имеют гамма-распределение . При построении аппроксимаций используются асимптотические разложения в мультипликативной форме. Полученные оценки сравниваются с оценками аддитивных разложений по многочленам Чебышева — Эрмита.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, асимптотическое разложение, гамма распределение, точность аппроксимации, оценки скорости сходимости, многочлены Чебышева — Эрмита.

Введение

Изучение оценки точности аппроксимаций в центральной предельной теореме (ЦПТ) — одна из известных задач в теории вероятностей. Основным результатом здесь является оценка теоремы Берри — Эссеена. Малая точность оценки теоремы Берри—Эссеена хорошо известна. Так (см., например, [6]), она гарантирует в ЦПТ точность аппроксимации 10^{-3} лишь тогда, когда число слагаемых в нормированных суммах превышает 160 000. Поэтому актуален вопрос повышения точности аппроксимации в ЦПТ. В частности с этой целью в центральной предельной теореме используются асимптотические разложения.

Как правило, асимптотические разложения имеют аддитивную форму, хотя возможно построение разложений и в мультипликативной форме. Так, например, мультипликативные формы асимптотических разложений рассматривались В.М. Калининым в его работе [3]. Данные разложения были построены им для часто встречающихся вероятностных распределений: полиномиального, Пуассона, Стьюдента и уточняли скорость сходимости к предельному закону (нормальному или пуассоновскому).

Естественно, что вопросы о том, как строить мультипликативные разложения в общем случае; о том, какие формы разложений лучше с точки зрения точности аппроксимаций: аддитивные или мультипликативные, являются слишком обширными и мало изученными на текущий момент. В данной работе строится мультипликативное асимптотическое разложение в ЦПТ для случая гамма-распределения, и проводится его сравнение с соответствующим аддитивным разложением.

Для этого рассматривается последовательность независимых случайных величин $X_1, ..., X_n, ...$, которые имеют гамма-распределение с плотностью

$$p(y) = \frac{a^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-ay},\ k > 0,\ a > 0,\ y \geq 0. \tag{1}$$

Математическое ожидание и дисперсия так распределенных случайных величин равны k/a и k/a^2 соответственно. Поэтому их нормированные суммы представимы в виде

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n - nk/a}{\sqrt{nk}/a}. \tag{2}$$

Плотность распределения этих сумм обозначим через $p_n(x)$. Далее в статье для $p_n(x)$ строится асимптотическое разложение в мультипликативной форме с явной оценкой остатка, которое сравнивается с известным аддитивным разложением.

1. Асимптотическое разложение гамма-распределения

Характеристическая функция исходных случайных величин $X_1, ..., X_n, ...$ равна $f(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-k}$. Ее вид позволяет выписать n-кратную свертку данных независимых одинаково распределенных случайных величин

$$p^{*n}(y) = \frac{a^{nk}}{\Gamma(nk)} y^{nk-1} e^{-ay}. \tag{3}$$

Подстановка (3) в равенство

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{nk}}{a} p^{*n} \left(x\frac{\sqrt{nk}}{a} + \frac{nk}{a} \right)$$

приводит к следующей формуле плотности распределения нормированных сумм

$$p_n(x) = \left(\frac{(nk)^{nk-\frac{1}{2}}}{\Gamma(nk)} e^{-nk} \right) e^{-x\sqrt{nk} + (nk-1)\ln\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}+1\right)}. \tag{4}$$

Гамма-функция допускает [1, с. 196] разложение с помощью ряда Стирлинга

$$\Gamma(nk) = \sqrt{2\pi} e^{-nk} (nk)^{nk-\frac{1}{2}} e^{\sum\limits_{l=1}^{t-1} \frac{B_{2l}}{2l} \frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}} + \theta \frac{B_{2t}}{2t} \frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}}}, \tag{5}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, а B_{2t} — это числа Бернулли, определенные в [1, с. 197].

Подстановка (5) в правую часть (4) доставляет

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sum\limits_{l=1}^{t-1} \frac{B_{2l}}{2l} \frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}} - \theta \frac{B_{2t}}{2t} \frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}}} \cdot e^{-x\sqrt{nk} + (nk-1)\ln\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}+1\right)}. \qquad (6)$$

При $|x| < \sqrt{nk}$ рассмотрим выражение

$$-x\sqrt{nk} + (nk-1)\ln\left(1 + x/\sqrt{nk}\right)$$

из правой части равенства (6). При этих ограничениях на x сходится абсолютно ряд для логарифма $\ln\left(1 + x/\sqrt{nk}\right)$ и справедлива следующая цепочка равенств:

$$-x\sqrt{nk} + (nk-1)\ln\left(\frac{x}{\sqrt{nk}} + 1\right) = -x\sqrt{nk} + (nk-1)\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \frac{x^l}{(nk)^{\frac{l}{2}}} =$$

$$= -x\sqrt{nk} + (nk-1)\frac{x}{\sqrt{nk}} - (nk-1)\frac{x^2}{2nk} + (nk-1)\sum_{l=3}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \frac{x^l}{(nk)^{\frac{l}{2}}} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{nk}} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2nk} + (nk-1)\sum_{l=3}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \frac{x^l}{(nk)^{\frac{l}{2}}} =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{nk}}\right) + \left(1 - \frac{1}{nk}\right)\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2} \frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}} =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{nk}}\right) + \left(1 - \frac{1}{nk}\right)\sum_{l=1}^{m-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2} \frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}} + (nk-1)R_m,$$

где $R_m = \sum\limits_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)^{l+2}$ представляет собой остаток разложения в ряд Тейлора функции $\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{nk}}\right)$, для которого известны оценки[2, с. 50]:

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{m+2}\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)^{m+2} \qquad \text{при} \qquad 0 < x < \sqrt{nk}, \qquad (7)$$

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{(m+2)\left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{nk}}\right)}\left|\frac{x}{\sqrt{nk}}\right|^{m+2} \qquad \text{при} \qquad -\sqrt{nk} < x < 0. \qquad (8)$$

Поэтому при $|x| < \sqrt{nk}$ выражение (6) можно записать в виде

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sum\limits_{l=1}^{t-1} \frac{B_{2l}}{2l} \frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}} - \theta \frac{B_{2t}}{2t} \frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}}} \times$$

$$e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{nk}}\right) + \left(1 - \frac{1}{nk}\right)\sum\limits_{l=1}^{m-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2} \frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}} + (nk-1)R_m}$$

или

$$p_n(x) = \varphi(x) e^{-\frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1-\frac{x}{2\sqrt{nk}}\right)} e^{\left(1-\frac{1}{nk}\right)\sum\limits_{l=1}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}} - \sum\limits_{l=1}^{t-1}\frac{B_{2l}}{2l}\frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}}} + R, \tag{9}$$

где

$$|R| \leqslant \varphi(x) \left| e^{-\theta\frac{B_{2t}}{2t}\frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}} + (nk-1)R_m} - 1 \right| \times$$
$$e^{-\frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1-\frac{x}{2\sqrt{nk}}\right) + \left(1-\frac{1}{nk}\right)\sum\limits_{l=1}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}} - \sum\limits_{l=1}^{t-1}\frac{B_{2l}}{2l}\frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}}}. \tag{10}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (9), так же как и в монографии [4], назовем главной частью асимптотического разложения $p_n(x)$ в мультипликативной форме, а второе слагаемое — остаточной частью разложения.

Для $0 < x < \sqrt{nk}$ упростим оценку (10) остаточной части асимптотического разложения (9). Вначале рассмотрим модуль выражения

$$\exp\left(-\theta\frac{B_{2t}}{2t}\frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}} + (nk-1)\,R_m\right) - 1 \tag{11}$$

из правой части неравенства (10).

Если m четное, то сумма R_m отрицательная, а если нечетное, то данная сумма положительная. Выберем четное или нечетное m так, чтобы произведение $(nk-1)\,R_m$ имело знак минус. Данное условие можно записать в виде $(nk-1)\,(-1)^{m+1} < 0$.

Поскольку $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, а B_{2t} — числа Бернулли, то можно выбрать t так, чтобы выражение $-\theta\frac{B_{2t}}{2t}\frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}}$ было отрицательным. То есть t таково, что $B_{2t} > 0$. Очевидно, что при описанных условиях и справедливости оценки (7) верно неравенство

$$\left| e^{-\theta\frac{B_{2t}}{2t}\frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}} + (nk-1)R_m} - 1 \right| \leqslant \frac{x^2}{m+2}\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)^m + \frac{B_{2t}}{2t(2t-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{nk}}\right)^{4t-2}.$$

При $0 < x < \sqrt{nk}$ сумма $\sum\limits_{l=1}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}}$ из правой части неравенства (10) представляет собой часть знакочередующегося и абсолютно сходящегося ряда, поэтому справедлива оценка

$$\left|\sum_{l=1}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}}\right| \leqslant \frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{nk}}.$$

Выражение $-\sum\limits_{l=1}^{t-1}\frac{B_{2l}}{2l}\frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}}$ из (10) — это сумма первых $t-1$ членов ряда Стирлинга. В [1] говорится, что бесконечно продолженный ряд Стирлинга расходится, однако при этом доставляет очень точный и удобный метод для вычислений, так как представляет собой псевдо-сходящийся ряд, и точность, которая может быть достигнута, тем больше, чем более значительно значение nk. Члены ряда поначалу очень быстро убывают, и ошибка, получающаяся, если прервать ряд на каком-нибудь члене, имеет знак первого отбрасываемого члена, а по абсолютной величине меньше его.

Эрмит в работе [1, с. 182] приводит результат диссертации Бурге, в котором указана формула для вычисления значения номера самого близкого к нулю члена ряда: $t_0 = \pi nk + \frac{3}{4} - \frac{3}{32\pi nk}$. В той же лекции, в которой приводится результат Бурге, Эрмит вслед за Лежандром находит значение наименьшего члена: $\frac{\sqrt{2nk}}{(2\pi nk-1)}e^{-2\pi nk}$. Видно, что данный член убывает экспоненциально быстро по n, а сумма $-\sum\limits_{l=1}^{t_0-1}\frac{B_{2l}}{2l}\frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}}$ по модулю не будет превосходить $\frac{1}{12nk}$.

Таким образом, при $0 < x < \sqrt{nk}$ получаем оценку

$$|R| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{x^2}{m+2}\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)^m + \frac{B_{2t_0}}{2t_0(2t_0-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{nk}}\right)^{4t_0-2}\right)\times e^{-\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{nk}\right)\left(1-\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)-\frac{x}{\sqrt{nk}}+\frac{1}{12nk}}. \tag{12}$$

Теперь изучим оценку (10) при $-\sqrt{nk} < x < 0$. Снова вначале рассмотрим выражение (11) из (10). Сумма

$$R_m = -\sum_{l=m}^{\infty}\frac{1}{l+2}\left(\frac{-x}{\sqrt{nk}}\right)^{l+2},$$

входящая в (11), при $-\sqrt{nk} < x < 0$ отрицательна. Поэтому при $B_{2t} > 0$ и $nk > 1$ рассматриваемый множитель с учетом неравенства (8) может быть оценен следующим образом

$$\left|e^{-\theta\frac{B_{2t}}{2t}\frac{1}{(2t-1)(nk)^{2t-1}}+(nk-1)R_m}-1\right| \leqslant \leqslant \frac{x^2}{(m+2)\left(1-\frac{|x|}{\sqrt{nk}}\right)}\left|\frac{x}{\sqrt{nk}}\right|^m + \frac{B_{2t_0}}{2t_0(2t_0-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{nk}}\right)^{4t_0-2}.$$

Выражение

$$\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1-\frac{x}{2\sqrt{nk}}\right)+\left(1-\frac{1}{nk}\right)\sum_{l=1}^{m-1}\frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}}\right)$$

из правой части неравенства (10) разобьем для удобства на два множителя. При данных ограничениях на x первый множитель

$$\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1-\frac{x}{2\sqrt{nk}}\right)\right)$$

из последнего выражения не превосходит $e^{3/2}$, а второй можно представить в виде

$$\exp\left(-x^2\left(1-\frac{1}{nk}\right)\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{l+2}\left(\frac{-x}{\sqrt{nk}}\right)^l\right).$$

При выполнении условия $\frac{-x}{\sqrt{nk}} < 1$ сумма $\sum\limits_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l+2} \left(\frac{-x}{\sqrt{nk}}\right)^l$ в правой части последнего равенства положительна и для нее справедлива оценка

$$\frac{|x|}{3\sqrt{nk}} < \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l+2} \left(\frac{-x}{\sqrt{nk}}\right)^l.$$

Поэтому второй множитель из правой части неравенства (10) можно оценить так:

$$\exp\left(\left(1 - \frac{1}{nk}\right) \sum_{l=1}^{m-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2} \frac{x^{l+2}}{(nk)^{\frac{l}{2}}}\right) \leqslant \exp\left(-\frac{|x|^3}{\sqrt{nk}} \left(1 - \frac{1}{nk}\right)\right).$$

Таким образом, при $-\sqrt{nk} < x < 0$ получаем следующую оценку

$$|R| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x^2}{(m+2)\left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{nk}}\right)} \left|\frac{x}{\sqrt{nk}}\right|^m + \frac{B_{2t_0}}{2t_0(2t_0-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{nk}}\right)^{4t_0-2}\right) \times$$
$$e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{|x|^3}{\sqrt{nk}}\left(1 - \frac{1}{nk}\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{12nk}}. \quad (13)$$

При $x > \sqrt{nk}$ воспользуемся тем, что $p_n(x)$ монотонно убывает и, значит, не превосходит $p_n(\sqrt{nk})$. Из (6) следует, что справедливо представление

$$p_n(\sqrt{nk}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta}{12nk}} e^{-nk+(nk-1)\ln(2)},$$

из которого после элементарных преобразований получаем

$$p_n(\sqrt{nk}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-nk\ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{\theta}{12nk}}.$$

Видно, что правая часть последнего неравенства убывает экспоненциально быстро с ростом n. Очевидно, что $p_n(x) = 0$ при $x < -\sqrt{nk}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть случайные величины X_i при $i = 1, 2, ..., n$ имеют гамма-распределение с математическим ожиданием $\frac{k}{a}$ и дисперсией $\frac{k}{a^2}$ и выполнено условие $nk > 1$. Тогда при $-\sqrt{nk} < x < \sqrt{nk}$ асимптотическое разложение плотности распределения нормированных сумм* (2) *можно представить в мультипликативной форме*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{nk}}\right)} e^{\left(1 - \frac{1}{nk}\right)x^2 \sum\limits_{l=1}^{m-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2} \left(\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)^l - \sum\limits_{l=1}^{t_0-1} \frac{B_{2l}}{2l} \frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}}} + R_m(nk, x),$$

где для $|R_m(nk, x)|$ справедлива при $-\sqrt{nk} < x < 0$ оценка (13)*, а при $0 < x < \sqrt{nk}$ оценка* (12).

При $\sqrt{nk} < x$ плотность распределения нормированных сумм убывает при $n \to \to \infty$ экспоненциально быстро и справедлива оценка

$$|p_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-nk\ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{\theta}{12nk}}.$$

При $x < -\sqrt{nk}$ *справедливо* $p_n(x) = 0$.

В оценках (13) *и* (12) *значение* t_0 *берется из условий* $t_0 \in \mathbb{N}$, $B_{2t_0} > 0$ *и*

$$\frac{|B_{2t_0}|}{2t_0(2t_0-1)(nk)^{2t_0-1}} < \frac{|B_{2l}|}{2l(2l-1)(nk)^{2l-1}}$$

для всех $l \in \mathbb{N}$, *кроме, быть может, одного.*

2. Сравнение точности мультипликативного разложения с точностью разложения по многочленам Чебышева — Эрмита

Сравним точность мультипликативного разложения из теоремы 1 с точностью разложения по многочленам Чебышева — Эрмита, полученного в [5] и представленного ниже в виде теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть у распределения* P *с нулевым средним и единичной дисперсией существует конечный абсолютный момент порядка* 8. *Пусть существует число* $\nu > 0$ *такое, что для характеристической функции* $f(t)$ *распределения* P *выполняется условие* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\nu}\, dt < \infty$. *Пусть* $p_n(x)$ — *плотность распределения суммы* $(X_1 + \ldots + X_n)\, n^{-\frac{1}{2}}$, *где случайные величины* X_i *имеют распределение* P. *Пусть неотрицательная четная функция* $\mu(t)$ *и число* $0 < T \leqslant 1$ *таковы, что* $|f(t)| \leqslant \mu(t)$, $|f(t)| \leqslant \mu(t)$ *при* $|t| \leqslant T$. *Тогда для любых* x *и* $n \geqslant max(\nu, 8)$

$$p_n(x) = \phi(x) + \frac{\theta_3}{\sqrt{n}} H_3(x)\phi(x) + \frac{\theta_3^2}{2\left(\sqrt{n}\right)^2} H_6(x)\phi(x) + \frac{\theta_4}{\left(\sqrt{n}\right)^2} H_4(x)\phi(x) +$$

$$+ \frac{\theta_3^3}{6\left(\sqrt{n}\right)^3} H_9(x)\phi(x) + \frac{\theta_5}{\left(\sqrt{n}\right)^3} H_5(x)\phi(x) + \frac{n-1}{n}\frac{\theta_3\theta_4}{\left(\sqrt{n}\right)^3} H_7(x)\phi(x) +$$

$$+ \frac{\theta_3^4}{4!\left(\sqrt{n}\right)^4} H_{12}(x)\phi(x) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{\theta_3^2\theta_4}{2\left(\sqrt{n}\right)^4} H_{10}(x)\phi(x) + \frac{n-1}{n}\frac{\theta_4^2}{2\left(\sqrt{n}\right)^4} H_8(x)\phi(x) +$$

$$+ \frac{\theta_3\theta_5}{\left(\sqrt{n}\right)^4} H_8(x)\phi(x) + \frac{\left(\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right)}{\left(\sqrt{n}\right)^4} H_6(x)\phi(x) + \frac{n-1}{n}\frac{\left(\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right)\theta_3}{\left(\sqrt{n}\right)^5} H_9(x)\phi(x) +$$

$$+ \frac{\theta_3^4}{4!\left(\sqrt{n}\right)^4} H_{12}(x)\phi(x) + \frac{\theta_3\theta_5}{\left(\sqrt{n}\right)^4} H_8(x)\phi(x) + \frac{\theta_7}{\left(\sqrt{n}\right)^5} H_7(x)\phi(x) +$$

$$+ \frac{n-1}{n}\frac{\theta_4\theta_5}{\left(\sqrt{n}\right)^5} H_9(x)\phi(x) + \frac{\theta_3^2\theta_5}{2\left(\sqrt{n}\right)^5} H_{11}(x)\phi(x) + \frac{C_n^2}{n^2}\frac{\theta_3\theta_4^2}{\left(\sqrt{n}\right)^5} H_{11}(x)\phi(x) +$$

$$+ \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \frac{\theta_3^3\theta_4}{3!\left(\sqrt{n}\right)^5} H_{13}(x)\phi(x) + \frac{\theta_3^5}{5!\left(\sqrt{n}\right)^5} H_{15}(x)\phi(x) + R(x),$$

где

$$|R(x)| \leq \frac{\|\theta_8\|\beta_8(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} + \frac{|\theta_3\theta_5|\beta_8(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} + \frac{|\theta_4|}{2}\left(\|\theta_6\| + \frac{\theta_3^2}{2} + \left|\theta_6 - \frac{\theta_3^2}{2}\right|\right)\frac{\beta_{10}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} +$$

$$+ \left(|\theta_3\theta_7| + \frac{\theta_5^2}{2}\right)\frac{\beta_{10}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} + \frac{\theta_3^2}{2}\left(\frac{\theta_4^2}{4} + \frac{|\theta_3\theta_5|}{3}\right)\frac{\beta_{14}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} + \frac{\left|\theta_3^4\theta_4\right|}{4!}\frac{\beta_{16}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} + \frac{\theta_3^6}{6!}\frac{\beta_{18}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6} +$$

$$+\left|\theta_4\right|\left(\frac{|\theta_4|\|\theta_4\|}{6}+|\theta_3\theta_5|\right)\frac{\beta_{12}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^6}+\left(\frac{\theta_3^3}{3!}+\left\|\theta_9^{(7)}\right\|\right)\frac{\beta_9(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^7}+$$

$$+\left(\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_5|+\frac{|\theta_4|\left\|\theta_7^{(5)}\right\|+|\theta_4\theta_7|}{2}\right)\frac{\beta_{11}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^7}+\frac{\theta_4^2}{6}\left(|\theta_5|+\left\|\theta_5^{(3)}\right\|\right)\frac{\beta_{11}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^7}+$$

$$+\frac{\theta_5^2}{2}\frac{\beta_{10}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^8}+|\theta_5\theta_7|\frac{\beta_{12}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^8}+\frac{1}{2}\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right|\left(\|\theta_6\|+\frac{\theta_3^2}{2}+\frac{|\theta_3\theta_4\theta_5|}{2}\right)\frac{\beta_{12}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^8}+$$

$$+\frac{|\theta_4|}{2}\left(\frac{\theta_3^2|\theta_4|}{6}+\theta_5^2\right)\frac{\beta_{14}(\varphi)}{2\left(\sqrt{n}\right)^8}+\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_7|\frac{\beta_{13}(\varphi)}{2\left(\sqrt{n}\right)^9}+\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_5|\frac{\theta_3^2}{2}\frac{\beta_{17}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^9}+$$

$$+\frac{\theta_4^2|\theta_5|\beta_{15}(\varphi)}{3!\left(\sqrt{n}\right)^9}+\frac{1}{2}\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right|\frac{\left\|\theta_7^{(5)}\right\|\beta_{13}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^9}+\frac{1}{2}\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right|\frac{\theta_5^2}{2}\frac{\beta_{16}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^{12}}+$$

$$+\left(\frac{\theta_7^2}{2}+\frac{|\theta_4|}{2}\frac{\theta_5^2}{2}+\frac{1}{2}\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right||\theta_3\theta_5|\right)\frac{\beta_{14}(\varphi)}{\left(\sqrt{n}\right)^{10}}+A_n(T)+L_0(T\sqrt{n})+$$

$$+\left|\theta_6-\frac{\theta_3^2}{2}\right|\left(\frac{L_6\left(T\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n}\right)^4}+|\theta_3|\frac{L_9\left(T\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n}\right)^5}\right)+\frac{|\theta_3|\theta_4^2L_{11}\left(T\sqrt{n}\right)}{2\left(\sqrt{n}\right)^5}+\frac{\left|\theta_3^3\theta_4\right|L_{13}\left(T\sqrt{n}\right)}{3!\left(\sqrt{n}\right)^5}+$$

$$+\frac{|\theta_4|L_4\left(T\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n}\right)^2}+\frac{\theta_4^2L_8\left(T\sqrt{n}\right)}{2\left(\sqrt{n}\right)^4}+\frac{|\theta_3\theta_4|L_7\left(T\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n}\right)^3}+\frac{|\theta_4\theta_5|L_9\left(T\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n}\right)^5}+\frac{\left|\theta_3^2\theta_4\right|L_{10}\left(T\sqrt{n}\right)}{2\left(\sqrt{n}\right)^4}.$$

В теореме 2 многочлены $H_l(x)=\sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^j\frac{1}{j!2^j}\frac{x^{l-2j}}{(l-2j)!}$ — это многочлены Чебышева — Эрмита, величины $\Theta_l=\sum\limits_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{(-1)^j}{j!2^j}\frac{\alpha_{l-2j}}{(l-2j)!}$ — нормированные моменты Чебышева — Эрмита, а для выражений $\|\Theta_l\|$ справедливы формулы $\|\Theta_l\|=\frac{\beta_l}{l!}+\left\|\Theta_l^{(l-2)}\right\|$, где $\left\|\Theta_l^{(l-2)}\right\|=\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\frac{1}{j!2^j}\frac{\left|\alpha_{l-2j}\right|}{(l-2j)!}$. В формировании величин Θ_l, $\|\Theta_l\|$ и $\left\|\Theta_l^{(l-2)}\right\|$ участвуют обычные моменты $\alpha_l=\mathrm{M}X_1^l$, $\beta_k=\mathrm{M}\left|X_1\right|^l$ исходных величин.

Также отметим, что в теореме 2 выражения

$$A_n(T)=\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}(T)\int_{T}^{+\infty}|f(t)|^{\nu}\,dt,$$

где $\alpha\left(T\right)=max\left\{|f(t)|:t\geqslant T\right\}$, и

$$L_l\left(T\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\geqslant T\sqrt{n}}|t|^l\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

убывают экспоненциально быстро с ростом n.

Из сравнения теорем 1 и 2 следует, что мультипликативное разложение $p_n(x)$ и оценка остатка данного разложения выглядит в этом случае намного проще, чем в разложении по многочленам Чебышева — Эрмита. При сравнении истинного значения

$p_n(x)$ с рассматриваемыми нами разложениями необходимо учитывать тот факт, что для вычисления истинного значения требуется найти гамма-функцию от нецелочисленных аргументов. И следовательно, точность ее вычисления должна быть выше точности, заданной нами для разложений.

Для рассматриваемого гамма-распределения точность вычислений разложения $p_n(x)$ по многочленам Чебышева — Эрмита из теоремы 2 по порядку сравнима с $\frac{1}{n^3}$. Так, для значений $k = 1$, $a = 1$, $n = 5$ вычисления для разложений теоремы 2 гарантируют порядок точности 10^{-2}.

Видно, что оценку остатка из теоремы 1 для $-\sqrt{nk} < x < \sqrt{nk}$ можно представить в виде двух слагаемых, в первом из которых будет присутствовать параметр m и отсутствовать t_0, а во втором — наоборот. При этом первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым за счет произвола выбора параметра m, а второе при определенном выборе t_0 (условия даны в теореме 1, а приближенное значение возможно вычислить по формуле Бурге, представленной выше) убывает по nk экспоненциально. Откуда понятно, что повышение точности за счет выбора m возможно до значений, сравнимых со значением слагаемого, содержащего t_0, то есть со значением выражения

$$\frac{B_{2t_0}}{2t_0(2t_0-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{nk}}\right)^{4t_0-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{|x|^3}{\sqrt{nk}}\left(1-\frac{1}{nk}\right)+\frac{3}{2}+\frac{1}{12nk}}.$$

Для $k = 1$, $a = 1$, $n = 5$ наилучшее с точки зрения точности разложения значение параметра t_0 равно 16. Так, например, вычисления для мультипликативного разложения показали, что порядок точности вычислений для значений $k = 1$, $a = 1$, $n = 5$, $t_0 = 16$, $m = 10$ оценки остатка изменяется от 10^{-14} при $x = \sqrt{nk}/16$ до 10^{-3} при $x = 15\sqrt{nk}/16$, то есть для любого x из данного интервала гарантируется точность 10^{-3}. Поскольку выбор параметра m произволен, то возможно увеличение точности при увеличении значений m. Так, при $k = 1$, $a = 1$, $n = 5$, $t_0 = 16$, $m = 340$ точность вычислений имеет порядок 10^{-14} для любого x из рассматриваемого интервала.

Заключение

Таким образом, мы видим, что мультипликативное разложение нормированных сумм в случае гамма-распределения дает значительно большую точность численных вычислений по сравнению с рассмотренным аддитивным разложением при условии значительно меньшего числа вычислений.

Автор, пользуясь случаем, выражает глубокую благодарность В.В. Сенатову за постановку задачи и ее обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Валле-Пуссен, Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 2 / Ш.-Ж. Валле-Пуссен. — Л. ; М. : ГТТИ, 1933. — 469 с.

2. Гурса, Э. Курс математического анализа. Т. 2. Ч. 2 / Э. Гурса. — Л.;М. : ГТТИ, 1933. — 235 с.

3. Калинин, В. М. Сходящиеся и асимптотические разложения, для вероятностных распределений / В. М. Калинин // Теория вероятностей и ее применения. — 1967. — № 12 (1). — С. 24–38.

4. Сенатов, В. В. Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения / В. В. Сенатов. — М. : Либроком, 2009. — 350 с.

5. Соболев, В. Н. О точности некоторых асимптотических разложений в центральной предельной теореме / В. Н. Соболев // Теория вероятностей и ее применения. — 2007. — № 52 (3). — С. 490–505.

6. Соболев, В. Н. О точности некоторых асимптотических разложений в центральной предельной теореме / В. Н. Соболев // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — № 18 (5). — С. 807–808.

REFERENCES

1. Vallee-Poussin Ch.J. *Kurs analiza beskonechno malykh. T. 2* [Course of Infinitesimal Analysis. Vol. 2]. Leningrad, Moscow, GTTI Publ., 1933. 469 p.

2. Goursat E. *Kurs matematicheskogo analiza. T. 2. Ch. 2* [Course of Mathematical Analysis. Vol. 2]. Leningrad;Moscow, GTTI Publ., 1933. 235 p.

3. Kalinin V.M. Skhodyashchiesya i asimptoticheskie razlozheniya, dlya veroyatnostnykh raspredeleniy [Convergent and Asymptotical Expansions of Probability Distributions]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeniya* [Theory of Probability and Its Applications], 1967, no. 12 (1), pp. 24-38.

4. Senatov V.V. *Tsentralnaya predelnaya teorema: tochnost approksimatsii i asimptoticheskie razlozheniya* [Central Limit Theorem: Accuracy of Approximation and Asymptotic Expansions]. Moscow, Librokom Publ., 2009. 350 p.

5. Sobolev V.N. O tochnosti nekotorykh asimptoticheskikh razlozheniy v tsentralnoy predelnoy teoreme [On Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeniya* [Theory of Probability and its Applications], 2007, no. 52 (3), pp. 490-505.

6. Sobolev V.N. O tochnosti nekotorykh asimptoticheskikh razlozheniy v tsentralnoy predelnoy teoreme [On the Accuracy of Some Asymptotic Expansions in the Central Limit Theorem]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2011, no. 18 (5), pp. 807-808.

ASYMPTOTIC EXPANSION IN MULTIPLICATIVE FORM IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM IN THE CASE OF GAMMA DISTRIBUTION

Vitaly Nikolaevich Sobolev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Free Researcher
sobolev_vn@mail.ru
Zvenigorod, Russian Federation

Abstract. Study of estimation of accuracy of approximations in the Central limit theorem (CLT) is one of the known problems in probability theory. The main result here is the estimate of the theorem of Berry — Esseen. Its low accuracy is well known. So this theorem guarantees accuracy of approximation 10^3 in the CLT only if the number of summands in the normed sum is greater than 160 000. Therefore, increasing the accuracy of the approximations in the CLT is an actual task. In particular, for this purpose are used asymptotic expansions in the Central limit theorem. As a rule, asymptotic expansions have additive form. Although it is possible to construct expansions in the multiplicative form. So V.M. Kalinin in [3] received the multiplicative form of the asymptotic expansions. However, he constructed asymptotic expansions for probability distributions (multinomial, Poisson, Student's t-distribution). So very naturally the question arises: how to build multiplicative expansions in CLT? Secondly, what are the forms of decompositions in CLT in terms of accuracy approximations are better: additive or multiplicative? This paper proposes new asymptotic expansions in the central limit theorem which permit us to approximate distributions of normalized sums of independent gamma random variables with explicit estimates of the approximation accuracy and comparing them with expansions in terms of Chebyshev — Hermite polynomials. New asymptotic expansions is presented in the following theorem:

Теорема 1. *Let random variables X_i where $i = 1, 2, ..., n$ have gamma distribution with mathematical expectation $\frac{k}{a}$ and dispersion $\frac{k}{a^2}$ and inequality $nk > 1$ is fulfilled. Then, for $-\sqrt{nk} < x < \sqrt{nk}$, the asymptotic expansion of the density distribution of normalized sums* (2) *can be represented in a multiplicative form*

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{nk}}\left(1 - \frac{x}{2\sqrt{nk}}\right)} \times$$

$$\times e^{\left(1-\frac{1}{nk}\right)x^2 \sum\limits_{l=1}^{m-1} \frac{(-1)^{l+1}}{l+2}\left(\frac{x}{\sqrt{nk}}\right)^l - \sum\limits_{l=1}^{t_0-1} \frac{B_{2l}}{2l} \frac{1}{(2l-1)(nk)^{2l-1}}} + R_m(nk, x),$$

where for $|R_m(nk, x)|$ is true at $-\sqrt{nk} < x < 0$ estimate (13)*, and at $0 < x < \sqrt{nk}$ estimate* (12)*. At $\sqrt{nk} < x$ the density distribution of normalized sums decreases exponentially fast when $n \to \infty$ and correct estimate*

$$|p_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-nk\ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{\theta}{12nk}}.$$

At $x < -\sqrt{nk}$ is true $p_n(x) = 0$. In (13) *and* (12) *the number t_0 is taken*

from conditions $t_0 \in \mathbb{N}$, $B_{2t_0} > 0$ *and*

$$\frac{|B_{2t_0}|}{2t_0(2t_0-1)(nk)^{2t_0-1}} < \frac{|B_{2l}|}{2l(2l-1)(nk)^{2l-1}}$$

for all $l \in \mathbb{N}$ *except maybe one.*

Comparing multiplicative asymptotic expansion from theorem 1 with the additive asymptotic expansion from [5], we obtain that multiplicative asymptotic expansion of the density of normalized the sums in the case of gamma distribution give a much greater accuracy numerical calculations are compared with asymptotic additive expansion provided a much smaller number of calculations.

The author would like to thank Vladimir Senatov for setting the task and paying attention to this work.

Key words: central limit theorem, asymptotic expansions, gamma distribution, approximation accuracy, estimates of the convergence rate, polynomials of Chebyshev — Hermit.