DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.2

УДК 517.95 Дата поступления статьи: 19.03.2019
ББК 22.161.5 Дата принятия статьи: 29.04.2019

ПОНЯТИЕ И КРИТЕРИИ ЕМКОСТНОГО ТИПА НЕКОМПАКТНОГО РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ЕМКОСТИ

Владимир Михайлович Кесельман

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-2,
МИРЭА — Российский технологический университет
vmkes@yandex.ru
просп. Вернадского, 78, 119454 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Вводится достаточно общее понятие интегральной емкости на римановом многообразии, которое включает в себя основные классические для геометрической теории функций емкости, в том числе конформную емкость. В терминах этой обобщенной емкости, как и в классике, определяется понятие типа (параболический, гиперболический) некомпактного риманова многообразия.

Приведены интегральные критерии емкостного типа некомпактного риманова многообразия. Их частными случаями являются известные критерии конформного типа риманова многообразия.

Ключевые слова: риманово многообразие, емкость, конформный тип, p-параболический тип, p-гиперболический тип, объем геодезического шара, площадь геодезической сферы, функция исчерпания.

1. Обобщенная емкость и емкостной тип некомпактного риманова многообразия

Всюду в работе рассматривается произвольное n-мерное ($n \geq 2$) гладкое связное риманово многообразие, обозначаемое через M^n или просто M.

Понятие типа риманова многообразия опирается на понятие емкости его компактного подмножества. Мы вводим достаточно общее понятие интегральной (или вариационной) емкости компакта на римановом многообразии, включающее в себя основные классические для геометрической теории функций емкости, в том числе так называемую конформную емкость. Базой такого определения емкости для нас были работы Г. Шоке [9] (где рассмотрена общая концепция емкости), В.Г. Мазьи [5] (где вводится и используется обобщенная емкость для множеств в $\mathbb{R}^n$) и В.М. Миклюкова [6] (в которой обобщенная емкость применяется на римановом многообразии). В данной работе в определении емкости мы придерживаемся подхода В.Г. Мазьи.

1.1. Понятие (F, p)-емкости компакта на римановом многообразии

Пусть $F = F(x, \xi)$ — какая-либо гладкая неотрицательная функция, где $(x, \xi) \in \in TM^n$, обращающаяся в ноль только при $\xi = 0$ и удовлетворяющая следующему условию: для любых $x \in M^n$, $\xi \in T_x M^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$F(x, \lambda\xi) \leq c_F\, |\lambda| F(x, \xi) \tag{1}$$

с некоторой постоянной $c_F \geq 1$, не зависящей от x, ξ и λ.

Такую функцию F будем называть *допустимой для (F, p)-емкости*, в связи со следующим ниже определением (F, p)-емкости.

Фиксируем произвольно число $p > 1$. Назовем (F, p)-*емкостью компактного множества $K \subset M^n$* число

$$\operatorname{cap}_{F,p} K := \inf \int_{M^n} (F(x, \nabla u))^p\, dv, \tag{2}$$

где точная нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям u, финитным в M^n и таким, что $u \geq 1$ на K. (Здесь градиент ∇u и элемент объема dv связаны с исходной римановой метрикой многообразия M^n.)

Отметим, что более правильно емкость $\operatorname{cap}_{F,p} K$ следовало бы называть (F, p)-емкостью компакта K относительно абсолюта многообразия M^n, поскольку ее значение зависит от «массивности» идеальной границы (абсолюта) многообразия.

Частные случаи (F, p)-емкости

В классическом случае, когда $F(x, \xi) = |\xi|$, введенная (F, p)-емкость (2) называется *p-емкостью*, а при $p = n$ — *конформной емкостью*.

В монографиях [5] и [6] в определении (F, p)-емкости предполагается, что функция F является однородной первой степени по переменной ξ, то есть для любых $(x, \xi) \in \in TM^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$F(x, \lambda\, \xi) = |\lambda| F(x, \xi)\,.$$

Значит, в этом случае условие (1) выполняется с постоянной $c_F = 1$.

В классическом случае p-емкости функция F удовлетворяет, помимо основного условия однородности (по переменной ξ), еще и «неравенству треугольника» (аксиоме нормы) по аргументу ξ. Ниже, в теореме 1, нам потребуется более слабое неравенство («обобщенное неравенство треугольника»):

$$F(x, \xi_1 + \xi_2) \leq c_F(F(x, \xi_1) + F(x, \xi_2)) \tag{3}$$

для любых $x \in M^n$, $\xi_1 \in T_x M^n$, $\xi_2 \in T_x M^n$.

Наряду с классическим случаем p-емкости в качестве $F(x, \xi)$ могут выступать любые нормы в пространстве $T_x M^n$. Более того, эти примеры (F, p)-емкости, как показывает следующее замечание, можно существенно расширить.

Замечание 1. Гладкая функция $F = F(x, \xi)$, $(x, \xi) \in TM^n$, будет допустимой для (F, p)-емкости, если справедливы неравенства:

$$\forall (x, \xi) \in TM^n : \quad c_1 f(x) ||\xi||_x \leq F(x, \xi) \leq c_2 f(x) ||\xi||_x$$

с некоторыми постоянными $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, не зависящими от x и ξ.

Здесь $||\cdot||_x$ — какая-либо норма в пространстве T_xM^n, а $f = f(x)$, $x \in M^n$, — произвольная положительная функция на M^n.

Такая функция F удовлетворяет также и «обобщенному неравенству треугольника» (3). При этом в качестве постоянной c_F можно взять $c_F = c_2/c_1$.

Основные свойства емкости

Введенная (F,p)-емкость обладает следующими свойствами.

Монотонность емкости. *Для любых компактных множеств K_1 и K_2, таких, что $K_1 \subset K_2$, справедливо неравенство:*

$$\operatorname{cap}_{F,p} K_1 \leq \operatorname{cap}_{F,p} K_1 \,.$$

Непрерывность емкости. *Для компакта $K \subset M$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U \subset M$ компакта K, что для всех компактов $\tilde{K}$, таких что $K \subset \tilde{K} \subset U$, верно неравенство*

$$\operatorname{cap}_{F,p} \tilde{K} \leq \operatorname{cap}_{F,p} K + \varepsilon \,.$$

Неравенство Шоке. *Для любых компактных подмножеств K_1 и K_2 многообразия M выполняется следующее неравенство:*

$$\operatorname{cap}_{F,p} K_1 \cup K_2 + \operatorname{cap}_{F,p} K_1 \operatorname{cap} K_2 \leq \operatorname{cap}_{F,p} K_1 + \operatorname{cap}_{F,p} K_2.$$

Функция компактных множеств, удовлетворяющая приведенным здесь свойствам, называется *емкостью Шоке.*

1.2. Понятие (F,p)-емкостного типа риманова многообразия

Далее предполагается, что **многообразие M^n является некомпактным.**

*Будем говорить, что многообразие M^n имеет (F,p)-**параболический тип**, если $\operatorname{cap}_{F,p} K = 0$ для любого компакта $K \subset M^n$.*

*В противном случае (то есть если $\operatorname{cap}_{F,p} K > 0$ для какого-либо компакта $K \subset M^n$) будем говорить, что многообразие M^n имеет (F,p)-**гиперболический тип**.*

В случае p-емкости это определение совпадает с общеизвестным определением p-типа (при $p = n$ — конформного типа) риманова многообразия M^n.

Хорошо известно, что в определении p-параболического типа многообразия выполнение условия обращения в нуль p-емкости компакта K достаточно требовать лишь для одного *невырожденного континуума* (под которым понимается, как обычно, связное отличное от точки компактное множество).

Аналогичный факт имеет место и для принятого нами понятия (F,p)-параболического типа многообразия в случае, когда допустимая для (F,p)-емкости функция F удовлетворяет еще «обобщенному неравенству треугольника».

Теорема 1. *Пусть допустимая для* (F,p)*-емкости функция* F *удовлетворяет условию (3). Предположим, что* $\mathrm{cap}_{F,p} K = 0$ *для некоторого невырожденного континуума* $K \subset M^n$. *Тогда* $\mathrm{cap}_{F,p}\tilde{K} = 0$ *для любого компакта* $\tilde{K} \subset M^n$.

Следствие 1. *Предположим, что допустимая для* (F,p)*-емкости функция* F *удовлетворяет «обобщенному неравенству треугольника» (3).*

Тогда многообразие M^n *имеет* (F,p)*-параболический тип в том и только том случае, когда* $\mathrm{cap}_{F,p} K = 0$ *хотя бы для одного невырожденного континуума* K.

Соответственно, M^n *имеет* (F,p)*-гиперболический тип в том и только том случае, когда* $\mathrm{cap}_{F,p} K > 0$ *для любого невырожденного континуума* $K \subset M^n$.

2. Критерии (F,p)-емкостного типа некомпактного риманова многообразия

В данном разделе для введенного понятия (F,p)-емкостного типа многообразия M^n мы распространяем полученные в совместной с В.А. Зоричем работе [2] критерии конформного типа (то есть когда $F(x,\xi) \equiv |\xi|$, $p = n$) некомпактного многообразия M^n, выраженные в виде условий на рост объема $V(r)$ и площади $S(r)$ граничной сферы геодезического шара радиуса r в полной метрике, конформно-эквивалентной исходной метрике многообразия.

В предлагаемых критериях (F,p)-емкостного типа многообразия роль класса конформных полных метрик принимает на себя класс функций исчерпания данного многообразия, играющих роль функции геодезического расстояния r на полном некомпактном многообразии.

В свою очередь, роли функций объема $V(r)$ и площади $S(r)$ сферы геодезического шара радиуса r играют, соответственно, вводимые ниже величины обобщенного объема $V_{F,p,h}(r)$ и обобщенной площади $S_{F,p,h}(r)$.

Дадим сначала точные определения названных понятий: функции исчерпания многообразия, а также обобщенной площади и обобщенного объема.

2.1. Функция исчерпания многообразия и связанные с нею обобщенные площади и объемы

Для функции $h \in C(M,\mathbb{R})$ и ее значения $t \in \mathbb{R}$ введем обозначения множеств

$$B_h(t) := \{x \in M : h(x) < t\}, \quad E_h(t) := \{x \in M^n : h(x) = t\},$$

которые естественно называть, соответственно, *h-шаром* и *h-сферой* (радиусов t) на многообразии M.

Функцией исчерпания многообразия M назовем такую локально липшицеву неотрицательную и неограниченную в M функцию h, что семейство открытых шаров $B_h(t)$, $t > 0$, образует исчерпание многообразия M, то есть все эти h-шары предкомпактны, $B_h(t_1) \Subset B_h(t_2)$ при любых $t_1 < t_2$, причем $\cup_t B_h(t) = M$.

Очевидно, что функция исчерпания многообразия M достигает минимума в M, который для определенности будем считать равным нулю.

Исходным примером функции исчерпания для нас является в случае полного многообразия M функция расстояния $r = r(p)$, $p \in M$, текущей точки p до некоторой фиксированной точки $p_0 \in M$. Функция r порождает шаровое исчерпание многообразия геодезическими шарами $B_r(t)$, $t \in (0,+\infty)$, с центром в p_0. Известно, что r — липшицева в M функция и $|\nabla r| = 1$ почти всюду в M.

Далее, если функция h локально липшицева в M, то для произвольного ее значения t положим

$$S_{F,p,h}(t) := \int_{E_h(t)} F^p(x, \nabla h)/|\nabla h|\, ds,$$

где ds — элемент $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа на M^n (в метрике многообразия M^n). Величину $S_{F,p,h}(t)$ будем называть (F,p,h)-*площадью* h-сферы $E_h(t)$.

В классическом случае $F(x,\xi) \equiv |\xi|$ для рассматриваемой в качестве функции исчерпания полного многообразия M функции расстояния $h = r$ величина $S_{p,h}(t)$ (для любого p) совпадает с обычной площадью геодезической сферы $S(t)$ радиуса t.

В свою очередь, роль обычного n-мерного объема $V(U)$ какого-либо множества $U \subset M^n$ для произвольно заданной на нем локально липшицевой функции h будет играть следующая величина:

$$V_{F,p,h}(U) := \int_U F^p(x, \nabla h)\, dv,$$

которую назовем (F,p,h)-*объемом* множества U.

Далее в качестве U рассматривается h-шар $B_h(t)$ и вместо обозначения $V_{F,p,h}(B_h(t))$ используется символ $V_{F,p,h}(t)$.

2.2. Критерии (F,p)-емкостного типа многообразия

В целях краткости формулировок будем говорить про некоторое свойство, что оно *реализуемо в классе* каких-либо объектов, если существует такой объект этого класса, для которого данное свойство имеет место.

Теорема 2. *Некомпактное многообразие M^n имеет (F,p)-параболический тип тогда и только тогда, когда в классе его функций исчерпания реализуемо любое (или хотя бы одно) из следующих условий:*

0) $\quad V_{F,p,h}(M^n) < \infty\,;$

1) $$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{V_{F,p,h}(t)}{t^p} < \infty\,;$$

2) $$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{(t_{i+1}-t_i)^p}{V_{F,p,h}(t_{i+1}) - V_{F,p,h}(t_i)} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \infty$$

для некоторой положительной возрастающей неограниченной сверху числовой последовательности $\{t_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, значений функции h;

3) $$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \left(\frac{t}{V_{F,p,h}(t)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty, \quad t_0 > 0\,;$$

4) $$\sum_{i=1}^{+\infty} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{t - t_i}{V_{F,p,h}(t) - V_{F,p,h}(t_i)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty$$

для некоторой положительной возрастающей неограниченной сверху числовой последовательности $\{t_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, значений функции h;

$$5) \qquad \int\limits_{t_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{S_{F,p,h}(t)} \right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty \,, \quad t_0 > 0 \,.$$

Эти условия располагаются в следующем порядке подчиненности:

$$0) \to 1) \begin{matrix} \nearrow 2) \searrow \\ \searrow 3) \nearrow \end{matrix} 4) \to 5) \tag{4}$$

для любой, но одной и той же функции исчерпания h.

Отметим, что в основе получения приведенных емкостных критериев лежит ключевой критерий 0), который в классическом случае (то есть когда $F(x, \xi) \equiv |\xi|$, $p = n$) восходит к следующему геометрическому критерию конформно параболического типа многообразия, первоначально, по-видимому, полученному В.А. Зоричем в обзоре [12] и, независимо в том же году, в статье [11].

Некомпактное риманово многообразие имеет конформно параболический тип тогда и только тогда, когда конформной заменой метрики его можно превратить в полное многообразие конечного объема.

Замечание 2. Согласно теореме 2, приведенные в ней условия 0)–5) эквивалентны между собой в классе всех функций исчерпания многообразия (F, p)-параболического типа. Однако, как утверждается в теореме 4, для одной и той же функции этого класса никакие из указанных условий уже не являются эквивалентными. Тем не менее каждое из приведенных условий 1)–5) является точным (в определенном смысле) достаточным условием (F, p)-параболичности типа.

Например, в условии 1) знаменатель t^p нельзя, вообще говоря, заменить на функцию большего роста. Однако при некоторых дополнительных предположениях о функции исчерпания h ограничение на рост величины $V_{F,p,h}(t)$ (при $t \to +\infty$) в этом условии можно ослабить. Например, приведенный в теореме 2 список условий можно дополнить следующим (также точным) условием (F, p)-параболичности типа некомпактного многообразия M^n.

Следствие 2. *Предположим, что для некоторой функции исчерпания многообразия M^n функция $S_{F,p,h}^{\frac{1}{p-1}}(t)$ является выпуклой вниз при всех достаточно больших t и выполняется условие:*

$$1)' \qquad \varliminf_{t \to +\infty} \frac{V_{F,p,h}(t)}{t^p (\ln t)^{p-1}} < \infty \,.$$

Тогда многообразие M^n имеет (F, p)-параболический тип.

3. Описание функций обобщенного объема в классе функций исчерпания многообразия

В работе Р. Гримальди и П. Пансу [11] было получено описание функций, которые могут служить на некомпактном полном многообразии M конформно параболического или конформно гиперболического типов функциями объема геодезического шара $V(r)$ радиуса r для достаточно большого r при конформных заменах исходной метрики многообразия.

Мы приведем версию указанного результата для функций (F,p,h)-объема h-шара $V_h(t)$ на многообразии (F,p)-параболического или (F,p)-гиперболического типов, в которой роль конформно эквивалентных замен исходной метрики полного многообразия M будут играть функции исчерпания h данного многообразия.

Аналогично упомянутому результату работы [11], следующая теорема отвечает на вопрос, когда положительная возрастающая функция $v(t)$, $t \in [t_0,+\infty)$ (где $t_0 > 0$), *реализуется как функция $V_{F,p,h}(t)$ при $t \geq t_0$ в классе функций h исчерпания многообразия M^n*, точнее, когда имеет место представление

$$\forall\, t \geq t_0 : \quad v(t) = V_{F,p,h}(t)$$

для некоторой функции исчерпания h многообразия M?

Теорема 3. *Предположим, что допустимая для (F,p)-емкости функция $F(x,\xi)$ однородна по переменной ξ.*

Пусть $v = v(t)$, $t \in [t_0,+\infty)$, — произвольная положительная возрастающая абсолютно непрерывная функция такая, что величина $1/v'$ локально ограничена.

Если многообразие M^n имеет (F,p)-параболический тип, то функция v реализуется как функция $V_{F,p,h}(t)$ при $t \geq t_0$ в классе функций h исчерпания многообразия.

В случае если многообразие M^n имеет (F,p)-гиперболический тип, то функция v реализуется как функция $V_{F,p,h}(t)$ при $t \geq t_0$ в классе функций h исчерпания многообразия M^n тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию

$$\int^{+\infty} \left(\frac{1}{v'(t)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dt < \infty\,.$$

Используя теорему 3, можно обосновать высказанное выше в замечании 2 утверждение о том, что ни одна из импликаций, указанных в (4), вообще говоря, не обратима на произвольном некомпактном многообразии (F,p)-параболического типа (на многообразии (F,p)-гиперболического типа такой вопрос не возникает, поскольку, в силу теоремы 2, ни одна из этих импликаций в этом случае неверна).

Теорема 4. *Предположим, что многообразие M^n имеет (F,p)-параболический тип. Тогда в классе его функций исчерпания реализуема любая из следующих пар условий:*

$$1) \setminus 0); \quad 2) \setminus 1); \quad 3) \setminus 1); \quad 2) \setminus 3);$$

$$3) \setminus 2); \quad 4) \setminus 2); \quad 4) \setminus 3); \quad 5) \setminus 4).$$

Здесь мы используем обозначение вида $A) \setminus B)$ для любой пары условий $A)$ и $B)$ из теоремы 2, которое означает, что для одной и той же функции исчерпания h условие $A)$ выполнено, а условие $B)$ не выполнено.

Следствие 3. *Условие 1)' следствия 2 вместе с предположением о выпуклости вниз функции $S_{F,p,h}^{\frac{1}{p-1}}(t)$ реализуемо в классе функций исчерпания произвольного многообразия (F,p)-параболического типа, так что утверждение следствия 2 является критерием (F,p)-параболичности многообразия в указанном классе.*

При этом условие 1)' находится в следующем порядке подчиненности с условиями 1) и 2) теоремы 2:

$$1) \Rightarrow 1)' \Rightarrow 2)\,, \tag{5}$$

а иные импликации между условиями теоремы 2, включающие условие 1)', вообще говоря, не справедливы (для одной и той же функции исчерпания h при указанном предположении выпуклости функции $S_{F,p,h}^{\frac{1}{p-1}}(t)$).

Кроме того, при ослаблении предположения в следствии 2 о выпуклости вниз функции $S_{F,p,h}^{\frac{1}{p-1}}(t)$, например, до предположения о ее монотонном возрастании, выполнение условия 1)', вообще говоря, не гарантирует (F,p)-параболический тип многообразия M^n.

4. Достаточные условия параболичности через «взвешенные объемы» шаров

Как уже отмечалось выше, на полном многообразии M^n в качестве его функции исчерпания h традиционно выступает функция расстояния $r = r(x)$, $x \in M^n$, до некоторой фиксированной точки $x_0 \in M^n$. Напомним, что $|\nabla r| = 1$ почти всюду в M^n. Поэтому в классическом случае $F(x,\xi) = |\xi|$ величины $V_{F,p,h}(t)$ и $S_{F,p,h}(t)$ представляют собой, соответственно, n-мерный объем $V(t)$ и $(n-1)$-мерную площадь $S(t)$ сферы геодезического шара $B(t)$ радиуса t (с центром в точке x_0).

Тогда приведенные в теореме 2 условия 1)–5) представляют собой достаточные условия p-параболического типа некомпактного полного многообразия M^n в терминах роста величин $V(t)$ и $S(t)$ при $t \to +\infty$.

Эти достаточные условия p-параболичности, вообще говоря, хорошо известны и, по-видимому, впервые были получены в следующем порядке: условие 1) при $p = 2$ — С. Ченгом и С. Яу в [8], а при произвольном $p > 1$ — в [3]; условие 2) — в [10], условие 3) — А. Григорьяном (при $p = 2$) в [1], а для произвольных $p > 1$ — в [2]; условие 5) — Л. Альфорсом (при $n = p = 2$, причем как критерий параболичности поверхности в классе ее конформных изоморфизмов) в [7]. Для общего вида функции $F(x,\xi)$, но однородной по ξ, условие 5), как достаточное условие (F,p)-параболического типа, непосредственно вытекает из оценки (F,p)-емкости, установленной в [5].

На самом деле, из теоремы 2 можно получать за счет выбора отличной от r функции исчерпания h и другого вида достаточные условия (F,p)-параболического типа многообразия. Приведем один вид таких условий p-параболичности, в которых вместо объема шаров используется их «взвешенный объем».

Предварительно для произвольного множества $U \subset M$ и любой заданной на нем **липшицевой** положительной функции h введем, следуя В.М. Миклюкову, величину

$$V_h^{[q]}(U) := \int_U h^{-q}\,dv\,, \quad q \in \mathbb{R}\,,$$

которую назовем h-*взвешенным объемом* множества U.

В частности, в качестве h можно взять ту же функцию r расстояния на M (до некоторой точки $x_0 \notin U$). В простейшем случае $q = 0$ «взвешенный объем» $V_h^{[0]}(U)$ представляет собой обычный n-мерный лебегов объем множества U.

Следствие 4. *Пусть h — какая-либо липшицева функция исчерпания на некомпактном многообразии M^n.*

Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

$$1a) \qquad \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{V_h^{[q]}(B_h(t))}{t^{p-q}} < +\infty$$

для произвольного числа q такого, что $q < p$;

$$1b) \qquad \int^{+\infty} \left(\frac{t^{(p-q)/p}}{V_h^{[q]}(B_h(t))}\right)^{1/(p-1)} \frac{dt}{t^{q/p}} = \infty$$

для произвольного числа q такого, что $q < p$;

$$2a) \qquad \varlimsup_{t\to+\infty} t^{q-p}\, V_h^{[q]}(M^n \setminus B_h(t)) < +\infty$$

для произвольного числа q такого, что $q > p$;

$$2b) \qquad \int^{+\infty} \left(t^{(q-p)/p}\, V_h^{[q]}(M^n \setminus B_h(t))\right)^{1/(1-p)} \frac{dt}{t^{q/p}} = \infty$$

для произвольного числа q такого, что $q > p$;

$$3a) \qquad \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{V_h^{[p]}(B_h(t))}{\ln^p t} < +\infty\,;$$

$$3b) \qquad \int^{+\infty} \left(\frac{\ln t}{V_h^{[p]}(B_h(t))}\right)^{1/(p-1)} \frac{dt}{t} = \infty$$

(условия 2a) и 2b) имеют смысл, конечно, только, если $V_h^{[q]}(M^n) < \infty$).

Тогда многообразие M^n имеет p-параболический тип.

Условия 1a), 2a), 3a) на рост «взвешенного объема» впервые получены В.М. Миклюковым (см. по этому поводу [6]; условие 3 a) использовалось также в [4]). Отметим, что соответствующие им условия 1b), 2b), 3b) допускают несколько более высокий рост «взвешенного объема».

Например, p-параболичность типа многообразия на основании условия 1b) будет обеспечена, если (ср. с условием 1a))

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{V_h^{[q]}(B_h(t))}{t^{p-q}\, F(t)} < +\infty\,, \quad q < p\,,$$

где $F = F(t)$, $t \geq t_0 > 0$, — произвольная положительная функция, для которой

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{t(F(t))^{1/(p-1)}} = \infty\,.$$

В частности, в качестве F могут выступать функции вида $F(t) = (\ln t)^{p-1}$, $F(t) = (\ln t \ln\ln t)^{p-1}$ и т. п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григорьян, А. А. Об одной лиувиллевой теореме на римановом многообразии / А. А. Григорьян // Успехи матем. наук. — 1982. — Т. 37, № 3. — С. 181–182.

2. Зорич, В. А. О конформном типе риманова многообразия / В. А. Зорич, В. М. Кесельман // Функциональный анализ и его приложения. — 1996. — Т. 30, № 2. — С. 40–55.

3. Кесельман, В. М. О римановых многообразиях a-параболического типа / В. М. Кесельман // Изв. вузов. Математика. — 1985. — № 4. — С. 81–83.

4. Кесельман, В. М. О поведении «в целом» неограниченных гиперповерхностей с квазиконформным гауссовым отображением / В. М. Кесельман, В. М. Миклюков // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 6. — С. 195.

5. Мазья, В. И. Пространства С.Л. Соболева / В. И. Мазья. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1985. — 416 с.

6. Миклюков, В. М. Геометрический анализ / В. М. Миклюков. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — 530 с.

7. Ahlfors, L. Sur le type d'une surface de Eiemann / L. Ahlfors // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A. — 1935. — Vol. 201. — P. 30–32.

8. Cheng, S. Y. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric application / S. Y. Cheng, S.-T. Yau // Comm. Pure and Appl. Math. — 1975. — Vol. 28. — P. 333–354.

9. Choquet, G. Theory of capacities / G. Choquet // Annales de l'institut Fourier. — 1954. — Vol. 5. — P. 131–295.

10. Coulhon, Th. Harnack inequality and hyperbolicity for subelliptic p-Laplacians with applications to Picard type theorems / Th. Coulhon, I. Holopainen, L. Saloff-Coste // Geometric and Functional Analysis. — 2001. — Vol. 11, № 6. — P. 1139–1191.

11. Grimaldi, R. Sur la croissance du volume dans une classe conforme / R. Grimaldi, P. Pansu // Math. pures et appl. — 1992. — Vol. 71. — P. 1–19.

12. Zorich, V. A. The global homeomorphism theorem for space quasiconformal mappings, its development and related open problems / V. A. Zorich // Lecture Notes in Math. — 1992. — Vol. 1508. — P. 131–148.

REFERENCES

1. Grigor'yan A.A. Ob odnoy liuvillevoy teoreme na rimanovom mnogoobrazii [A Liouville Theorem on a Manifold]. *Uspekhi matem. nauk* [Russian Math. Surveys], 1982, vol. 37, no. 3, pp. 181-182.

2. Zorich V.A., Keselman V.M. O konformnom tipe rimanova mnogoobraziya [On the Conformal Type of a Riemannian Manifold]. *Funktsionalnyy analiz i ego prilozheniya* [Func. Anal. and Appl.], 1996, vol. 30, no. 2, pp. 40-55.

3. Keselman V.M. O rimanovykh mnogoobraziyakh a-parabolicheskogo tipa [On Riemannian Manifolds of A-Parabolic Type]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1985, no. 4, pp. 81-83.

4. Keselman V.M., Miklyukov V.M. O povedenii «v tselom» neogranichennykh giperpoverkhnostey s kvazikonformnym gaussovym otobrazheniem [About Behavior in Large of a Surfaces with Quasiconformal Gauss Map]. *Sib. matem. zhurn.* [Siberian Math. J.], 1984, vol. 25, no. 6, pp. 195.

5. Maz'ya V.I. *Prostranstva S.L. Soboleva* [Sobolev Spaces]. Leningrad, Izd-vo LGU Publ., 1985. 416 p.

6. Miklyukov V.M. *Geometricheskiy analiz* [Geometric Analysis]. Volgograd, Izd-vo VolGU Publ., 2007. 530 p.

7. Ahlfors L. Sur Le Type D'une Surface de Eiemann. *C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. A*, 1935, vol. 201, pp. 30-32.

8. Cheng S.Y., Yau S.-T. Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Application. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1975, vol. 28, pp. 333-354.

9. Choquet G. Theory of Capacities. *Annales de l'institut Fourier*, 1954, vol. 5, pp. 131-295.

10. Coulhon Th., Holopainen I., Saloff-Coste L. Harnack Inequality and Hyperbolicity for Subelliptic P-Laplacians with Applications to Picard Type Theorems. *Geometric and Functional Analysis*, 2001, vol. 11, no. 6, pp. 1139-1191.

11. Grimaldi R., Pansu P. Sur la Croissance du Volume dans Une Classe Conforme. *Math. pures et appl.*, 1992, vol. 71, pp. 1-19.

12. Zorich V.A. The Global Homeomorphism Theorem for Space Quasiconformal Mappings, Its Development and Related Open Problems. *Lecture Notes in Math.*, 1992, vol. 1508, pp. 131-148.

THE CONCEPT AND CRITERIA OF THE CAPACITIVE TYPE OF THE NON-COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLD BASED ON THE GENERALIZED CAPACITY

Vladimir Mikhaylovich Keselman

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics-2,
MIREA — Russian Technological University
vmkes@yandex.ru
Prosp. Vernadskogo, 78, 119454 Moscow, Russian Federation

Abstract. Let M^n be a non-compact n-dimensional Riemannian manifold and let $p > 1$ be a fixed real number. We call (F, p)-capacity of a compact set $K \subset M^n$ a value $\inf \int_{M^n} (F(x, \nabla u))^p dv$, where the exact lower bound is taken over all smooth functions u finite in M^n and such that $u \geq 1$ on K. Function $F = F(x, \xi)$, $(x, \xi) \in TM^n$ is smooth, non-negative and satisfies certain general conditions. A special case of (F, p)-capacity is, e. g., the conformal capacity when $F(x, \xi) = |\xi|$ and $p = n$. We based this notion of (F, p)-capacity on the work of G. Choquet, V.G. Mazya, and V.M. Miklyukov.

Let us introduce the concept of the type of a non-compact manifold M^n as follows. We say that M^n is of (F, p)-parabolic type, if the (F, p)-capacity of some non-degenerate compact $K \subset M^n$ is zero. Otherwise, we say that manifold M^n is of (F, p)-hyperbolic type.

Like in the classical case, this notion of (F, p)-type of the non-compact Riemannian manifold is invariant with respect to the specific choice of the compact set K.

We prove the criteria for the manifold to be of (F, p)-parabolic or (F, p)-hyperbolic type. Special cases of these are the well-known criteria of conformal type of a Riemannian manifold expressed in terms of growth of the volume $V(r)$ of geodesic balls or of area $S(r)$ of their boundary spheres of radius r.

In the general case of criteria of (F, p)-type of manifold M^n the role of the class of complete metrics conformal to the initial metric of the manifold takes on the class of exhaustion functions h of manifold M^n, and the roles of $V(r)$ and $S(r)$ are taken by functions $V_{F,p,h}(r) = \int_{h \leq r} (F(x, \nabla h))^p dv$ and $S_{F,p,h}(r) = \int_{h=r} (F(x, \nabla h))^p (d\sigma / |\nabla h|)$, respectively.

The criteria themselves are expressed in terms of the growth of these

functions. For instance, the following conditions

$$\int^{+\infty} \left(\frac{r}{V_{F,p,h}(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr = \infty, \int^{+\infty} \left(\frac{1}{S_{F,p,h}(r)}\right)^{\frac{1}{p-1}} dr = \infty$$

characterize the (F,p)-parabolic type of the non-compact Riemannian manifold.

Key words: Riemannian manifold, capacity, conformal type, p-parabolic type, p-hyperbolic type, volume of a geodesic ball, area of the geodesic sphere, exhaustion function.