www.volsu.ru

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

К 75-летию проф. В.М. Миклюкова. Часть I

DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.2.1

УДК 517.765, 515.172.2, 512.816 Дата поступления статьи: 20.03.2019
ББК 22.161.5 Дата принятия статьи: 22.04.2019

ОБ ОРБИТАХ ОДНОЙ НЕРАЗРЕШИМОЙ 5-МЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ [1]

Артем Викторович Атанов

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий,
Воронежский государственный университет
atanov.cs@gmail.com
Университетская площадь, 1, 394018 г. Воронеж, Российская Федерация

Александр Васильевич Лобода

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры прикладной математики и механики,
Воронежский государственный технический университет
lobvgasu@yandex.ru
ул. 20 лет Октября, 84, 394006 г. Воронеж, Российская Федерация

Аннотация. В статье изучаются голоморфно однородные вещественные гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^3$, ассоциированные с единственной неразрешимой неразложимой 5-мерной алгеброй Ли. В отличие от многих других 5-мерных алгебр, орбиты которых обладают «повышенной симметричностью», невырожденные по Леви орбиты обсуждаемой алгебры оказываются «просто однородными», то есть имеют в точности 5-мерные алгебры симметрий. С точностью до голоморфной эквивалентности все такие орбиты совпадают с конкретной индефинитной алгебраической поверхностью 4-го порядка.

Доказательства этих утверждений опираются на технику голоморфной реализации абстрактных алгебр Ли. Существенным моментом является также использование понятия нормальной формы Мозера для уравнений вещественно-аналитических гиперповерхностей.

Ключевые слова: однородное многообразие, голоморфные преобразования, неразрешимые алгебры Ли, векторное поле, вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$.

Введение

Данная статья посвящена изучению задачи о голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностях пространства $\mathbb{C}^3$. Основной интерес в этой задаче в настоящее время связан (см.: [3; 4; 11; 13]) с невырожденными по Леви поверхностями, алгебры голоморфных векторных полей на которых имеют размерность 5.

При этом голоморфным реализациям 5-мерных алгебр в виде алгебр векторных полей на однородных гиперповерхностях часто соответствуют (см.: [1; 2]) вырожденные по Леви орбиты или однородные поверхности с размерностями алгебр симметрии, большими чем 5. В такой ситуации естественно интересоваться *просто однородными* (Коссовский) поверхностями, алгебры векторных полей на которых являются в точности 5-мерными.

Ниже рассматривается одна из пяти неразрешимых 5-мерных алгебр, обозначенная в [5] через g_5 и имеющая следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}[e_1, e_2] = 2e_1, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = 2e_3, \quad [e_1, e_4] = e_5, \\ [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_5] = -e_5, \quad [e_3, e_5] = e_4.\end{gathered} \tag{1}$$

Главным результатом статьи является следующее утверждение о локальном устройстве однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, являющихся орбитами алгебры (1).

Теорема 1. *Пусть M — вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$, невырожденная по Леви в некоторой точке. Если на M имеется 5-мерная алгебра голоморфных векторных полей со структурой g_5, обладающая вблизи этой точки полным рангом, то M голоморфно эквивалентна (индефинитной) просто однородной поверхности*

$$(v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1, \tag{2}$$

где z_1, z_2, w — координаты в $\mathbb{C}^3$, $x_2 = \operatorname{Re} z_2$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$ $(k = 1, 2)$, $v = \operatorname{Im} w$.

1. Упрощение базисов алгебр векторных полей

Используя технику работы [8], мы перейдем от рассмотрения абстрактной алгебры Ли (1) к соответствующей алгебре голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^3$. Элементы базиса такой алгебры будем записывать в виде

$$e_k = f_k(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial z_1} + g_k(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial z_2} + h_k(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial w} \quad (k = 1, \ldots, 5). \tag{3}$$

Здесь f_k, g_k, h_k — голоморфные (вблизи обсуждаемой точки поверхности) функции. Для сокращенного представления формулы (3) будем использовать также запись вида

$$e_k = (f_k, g_k, h_k).$$

Через z_1, z_2, w здесь и далее обозначаются координаты в пространстве $\mathbb{C}^3$. Их вещественные и мнимые части будем обозначать через $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$ $(k = 1, 2)$, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$. Пару координат (z_1, z_2) мы часто будем объединять в двумерный комплексный вектор z.

Подчеркнем, что свойство однородности изучается в статье в локальном смысле, то есть речь идет о действиях локальных групп Ли голоморфных преобразований, являющихся транзитивными вблизи некоторой фиксированной точки q поверхности M.

Другими словами, это означает наличие вещественной алгебры Ли $g(M)$ голоморфных векторных полей, определенных вблизи q и заметающих своими значениями касательные пространства к M во всех точках этой поверхности, близких к q.

Везде ниже будем считать обсуждаемую точку q однородной поверхности M совпадающей с началом координат пространства $\mathbb{C}^3$.

Из теории дифференциальных уравнений известно (см., например, [6]), что любое гладкое векторное поле можно выпрямить вблизи неособой точки подходящим координатным диффеоморфизмом. В работе [8], развивающей идеи Э. Картана [9], показано, что подобные упрощения можно производить с несколькими полями одновременно. Упрощение даже одного поля с учетом коммутационных соотношений, выполняющихся для конкретной алгебры, влечет за собой возможность упрощения и других полей.

Под упрощением здесь понимается сокращение числа аргументов у функциональных коэффициентов f_k, g_k, h_k полей вида (3). За счет голоморфных преобразований координат часто удается сократить количество аргументов у f_k, g_k, h_k до одного или двух (в случае, когда функциональный коэффициент зависит только от одной переменной z_2, мы используем обозначение $\hat{f}_k$, $\hat{g}_k$, $\hat{h}_k$).

Отметим, что в статье рассматриваются только *невырожденные* по Леви поверхности. Определяющие функции таких поверхностей зависят от всех трех комплексных переменных, и матрица Гессе (см. [7]) вторых производных, суженная на комплексную касательную плоскость к такой поверхности, является невырожденной эрмитовой матрицей.

Сформулируем здесь три леммы о векторных полях на невырожденных гиперповерхностях, являющиеся уточнениями использованных (и обоснованных) в [8] утверждений.

Лемма 1. *Если на невырожденной по Леви гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ имеется пара коммутирующих голоморфных векторных полей e_1 и e_2, линейно независимых над $\mathbb{R}$, то голоморфной заменой координат эта пара может быть выпрямлена, то есть приведена (вблизи некоторой точки поверхности) к виду*

$$e_1 = (0, 0, 1),\ e_2 = (1, 0, 0).$$

Лемма 2. *Пусть два голоморфных векторных поля из базиса 5-мерной алгебры Ли имеют выпрямленный вид $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$, а еще два поля e_3, e_4 имеют специальный вид*

$$e_k = \Big(l_k(z_1, w) + \hat{f}_k(z_2), \hat{g}_k(z_2), L_k(z_1, w) + \hat{h}_k(z_2)\Big)\ \ (k = 3, 4) \tag{4}$$

с некоторыми голоморфными функциями $\hat{f}_k(z_2)$, $\hat{g}_k(z_2)$, $\hat{h}_k(z_2)$ и некоторыми линейными функциями $l_k(z_1, w)$, $L_k(z_1, w)$. Если при этом $\hat{g}_3(0) \neq 0$, то существует голоморфная замена переменных z_1, z_2, w, переводящая поле e_3 в состояние $(l_3(z_1, w), 1, L_3(z_1, w))$ и сохраняющая выпрямленный вид полей e_1, e_2, а также вид (4) *поля e_4.*

Замечание. Уточним, что при замене из леммы 2 голоморфные функции $\hat{f}_4(z_2)$, $\hat{g}_4(z_2)$, $\hat{h}_4(z_2)$ из представления поля e_4, вообще говоря, изменяются, в отличие от остающихся неизменными линейных функций $l_4(z_1, w)$, $L_4(z_1, w)$.

Лемма 3. *Если четверка базисных голоморфных полей 5-мерной алгебры $g(M)$ полного ранга имеет вблизи некоторой точки M вид*

$$\begin{aligned} e_1 &= (f_1(z_1,z_2,z_3), 0, h_1(z_1,z_2,z_3))\,, \\ e_2 &= (f_2(z_1,z_2,z_3), 0, h_2(z_1,z_2,z_3))\,, \\ e_3 &= (f_3(z_1,z_2,z_3), 0, h_3(z_1,z_2,z_3))\,, \\ e_4 &= (f_4(z_1,z_2,z_3), 0, h_4(z_1,z_2,z_3))\,, \end{aligned} \tag{5}$$

то поверхность M является вырожденной по Леви (вблизи обсуждаемой точки).

Отметим, что утверждение леммы 3 вытекает из независимости определяющей функции обсуждаемой поверхности от переменных z_1, w при выполнении условий вещественной линейной независимости рассматриваемой четверки полей.

Основная техническая идея доказательства сформулированной теоремы 1 состоит в постепенном упрощении (за счет голоморфных преобразований) нескольких базисных полей. Конкретные шаги таких упрощений аналогичны вспомогательным утверждениям из работы [8]. После нескольких таких шагов алгебры с упрощенными базисами удается проинтегрировать и получить явные уравнения обсуждаемых однородных поверхностей.

2. Голоморфные реализации алгебры g_5

Так как в алгебре g_5, задаваемой коммутационными соотношениями (1), два поля e_1 и e_5 коммутируют, то, согласно лемме 1, мы можем их выпрямить (в окрестности некоторой точки, близкой к началу координат) до состояния

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad e_5 = \frac{\partial}{\partial w} \quad \text{или} \quad e_1 = (1,0,0), \quad e_5 = (0,0,1).$$

Рассматривая далее коммутационные соотношения $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_4, e_5] = 0$, мы получаем формулы для поля

$$e_4 = (\hat{f}_4(z_2), \hat{g}_4(z_2), z_1 + \hat{h}_4(z_2)).$$

Аналогичные рассмотрения коммутаторов $[e_1, e_2] = 2e_1$, $[e_2, e_5] = -e_5$ приводят к формулам

$$e_2 = (2z_1 + \hat{f}_2(z_2), \hat{g}_2(z_2), w + \hat{h}_2(z_2)).$$

В силу леммы 3 можно утверждать, что вблизи начала координат пространства $\mathbb{C}^3$ найдется точка на поверхности M, в которой либо $\hat{g}_2(z_2)$, либо $\hat{g}_4(z_2)$ принимает ненулевое значение. Перенесем начало координат в такую точку и рассмотрим далее два случая упрощения базисных полей:

1-й случай: $\hat{g}_4(0) \neq 0$,

2-й случай: $\hat{g}_4(0) \equiv 0$, $\hat{g}_2(0) \neq 0$.

Предложение 1. *Базис (любой) голоморфной реализации алгебры g_5 в первом случае можно привести голоморфным преобразованием к виду*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0)\,, \\ e_2 &= (2z_1, -z_2, w)\,, \\ e_3 &= (-z_1^2, z_1 z_2 - w, -z_1 w)\,, \\ e_4 &= (0,1,z_1)\,, \\ e_5 &= (0,0,1)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство. Для доказательства предложения 1 рассмотрим базис с учетом уже полученных упрощений отдельных его элементов

$$\begin{aligned} &e_1 = (1,0,0)\,, \\ &e_2 = \Big(2z_1 + \hat{f}_2(z_2), \hat{g}_2(z_2), w + \hat{h}_2(z_2)\Big)\,, \\ &e_4 = \Big(\hat{f}_4(z_2), \hat{g}_4(z_2), z_1 + \hat{h}_4(z_2)\Big)\,, \\ &e_5 = (0,0,1)\,. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2 к полям e_2, e_4, имеющим вид (4), упростим поле e_4 до вида $e_4 = (0,1,z_1)$ и продолжим рассмотрение коммутаторов, связанных с полем e_3.

Из $[e_3, e_5] = e_4$ получаем

$$-\left(\frac{\partial f_3}{\partial w}, \frac{\partial g_3}{\partial w}, \frac{\partial h_3}{\partial w}\right) = (0,1,z_1),$$

так что

$$e_3 = (f_3(z), -w + g_3(z), -z_1 w + h_3(z)).$$

Аналогично из $[e_1, e_3] = -e_2$ получаем

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial z_1}, \frac{\partial g_3}{\partial z_1}, -w + \frac{\partial h_3}{\partial z_1}\right) = -(2z_1 + \hat{f}_2, \hat{g}_2, w + \hat{h}_2)$$

и

$$e_3 = (-z_1^2 - z_1\hat{f}_2 + \hat{f}_3, -w - z_1\hat{g}_2 + \hat{g}_3, -z_1 w + z_1\hat{h}_2 + \hat{h}_3).$$

После таких рассмотрений остаются неиспользованными три коммутационных соотношения из десяти, имеющихся в алгебре, а именно

$$[e_2, e_4] = e_4, \quad [e_3, e_4] = 0, \quad [e_2, e_3] = 2e_3. \tag{7}$$

Первое из них имеет в развернутой форме вид

$$(2z_1 + \hat{f}_2)(0,0,1) - \Big((\hat{f}_2', \hat{g}_2', \hat{h}_2') + z_1(0,0,1)\Big) = (0,1,z_1),$$

и из него можно получить уточнение вида компонент поля

$$e_2 = (2z_1 + A_2, -z_2 + B_2, w + A_2 z_2 + C_2).$$

Здесь A_k, B_k, C_k — некоторые комплексные константы.

Как следствие, уточняется и вид поля

$$e_3 = \Big(-z_1^2 - A_2 z_1 + \hat{f}_3, -w - z_1(-z_2 + B_2) + \hat{g}_3, -z_1 w + z_1(A_2 z_2 + C_2) + \hat{h}_3\Big)\,. \tag{8}$$

Покомпонентное рассмотрение второго из тройки соотношений (7), то есть

$$\Big(-z_1^2 - A_2 z_1 + \hat{f}_3\Big)(0,0,1) - \Big((\hat{f}_3', z_1 + \hat{g}_3', A_2 z_1 + \hat{h}_3') + z_1(0,-1,-z_1)\Big) = 0$$

приводит к следующим выводам:

$$\hat{f}_3 = A_3; \quad \hat{g}_3 = B_3; \quad A_2 = 0, \quad \hat{h}_3 = A_3 z_2 + C_3,$$

и к уточнению формулы (8) для поля e_3. На этом этапе получаем

$$e_3 = (-z_1^2 + A_3, z_1 z_2 - B_2 z_1 - w + B_3, -z_1 w + C_2 z_1 + A_3 z_2 + C_3),$$

$$e_2 = (2z_1, -z_2 + B_2, w + C_2).$$

Наконец, последнее соотношение $[e_2, e_3] = 2e_3$ примет (с учетом полученных уточнений формул для полей e_2, e_3) вид

$$\begin{gathered} 2z_1(-2z_1, z_2 - B_2, -w + C_2) + (-z_2 + B_2)(0, z_1, A_3) + (w + C_2)(0, -1, -z_1) - \\ -(-z_1^2 + A_3)(2, 0, 0) - (z_1 z_2 - B_2 z_1 - w + B_3)(0, -1, 0) - \\ -(-z_1 w + C_2 z_1 + A_3 z_2 + C_3)(0, 0, 1) = 2e_3. \end{gathered}$$

Расписывая покомпонентно это равенство, получим

$$A_3 = 0; \quad B_3 + C_2 = 0; \quad -2C_2 z_1 - 4A_3 z_2 + (A_3 B_2 - 3C_3) = 0.$$

Это означает, что

$$C_2 = A_3 = B_3 = C_3 = 0,$$

а вся пятерка базисных полей обсуждаемой реализации алгебры g_5 принимает (в первом случае) вид

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0)\,, \\ e_2 &= (2z_1, -z_2 + B_2, w)\,, \\ e_3 &= (-z_1^2, z_1(z_2 - B_2) - w, -z_1 w)\,, \\ e_4 &= (0, 1, z_1)\,, \\ e_5 &= (0, 0, 1)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Сдвиг переменной $z_2^* = z_2 - B_2$ упрощает этот набор формул до состояния (6). Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Голоморфные реализации алгебры g_5 во втором случае могут иметь только вырожденные по Леви орбиты.*

Доказательство. Во втором случае начальные упрощения базиса позволяют записать четверку его элементов в виде

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0)\,, \\ e_2 &= (2z_1, 1, w)\,, \\ e_4 &= \left(\hat{f}_4(z_2), 0, z_1 + \hat{h}_4(z_2)\right), \\ e_5 &= (0, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

Обсудим в этом случае еще неиспользованные коммутационные соотношения. Так, равенство $[e_2, e_4] = e_4$ имеет в развернутой форме вид

$$2z_1(0, 0, 1) + (\hat{f}_4', 0, \hat{h}_4') - \hat{f}_4(2, 0, 0) + (z_1 + \hat{h}_4(0, 0, 1) = (\hat{f}_4(z_2), 0, z_1 + \hat{h}_4(z_2)).$$

Из него следует, что

$$\hat{f}_4(z_2) = A_4 e^{3z_2}, \hat{h}_4(z_2) = C_4 e^{2z_2}$$

с некоторыми комплексными константами A_4, C_4, так что

$$e_4 = (A_4 e^{3z_2}, 0, z_1 + C_4 e^{2z_2}). \tag{10}$$

Рассматривая далее коммутаторы $[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_3, e_5] = e_4$, получаем следующую информацию о компонентах поля e_3:

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial z_1}, \frac{\partial g_3}{\partial z_1}, \frac{\partial h_3}{\partial z_1}\right) = -(2z_1, 1, w),$$

$$-\left(\frac{\partial f_3}{\partial w}, \frac{\partial g_3}{\partial w}, \frac{\partial h_3}{\partial w}\right) = (A_4 e^{3z_2}, 0, z_1 + C_4 e^{2z_2}).$$

Это означает, что поле e_3 обязано иметь следующий упрощенный вид

$$e_3 = \left(-z_1^2 - wA_4 e^{3z_2} + \hat{f}_3,\ -z_1 + \hat{g}_3(z_2),\ -z_1 w + wC_4 e^{2z_2} + \hat{h}_3(z_2)\right).$$

Покажем, что в такой ситуации орбита голоморфной реализации обсуждаемой алгебры может быть только вырожденной по Леви. Для этого рассмотрим коммутатор $[e_2, e_3] = 2e_3$.

В развернутой форме получаем здесь

$$\begin{gathered}2z_1(-2z_1, -1, -w) + (-3A_4 w e^{3z_2} + \hat{f}_3',\ \hat{g}_3',\ 2C_4 w e^{2z_2} + \hat{h}_3') + \\ + w(-A_4 e^{3z_2}, 0, -z_1 + C_4 e^{2z_2}) - (-z_1^2 - wA_4 e^{3z_2} + \hat{f}_3)(2, 0, 0) - \\ -(-z_1 w + wC_4 e^{2z_2} + \hat{h}_3)(0, 0, 1) = 2e_3.\end{gathered}$$

Первая компонента этого векторного равенства имеет вид

$$-4z_1^2 + (-3A_4 w e^{3z_2} + \hat{f}_3') - A_4 w e^{3z_2} - 2(-z_1^2 - wA_4 e^{3z_2} + \hat{f}_3) = 2(-z_1^2 - wA_4 e^{3z_2} + \hat{f}_3)$$

или

$$2A_4 w e^{3z_2} + (\hat{f}_3' - 4\hat{f}_3) = 0.$$

Последнее равенство формально содержит переменные z_2 и w (слагаемые с переменной z_1 автоматически сократились). Необходимым условием его тождественного выполнения является равенство $A_4 = 0$. Но в силу (10)

$$e_4 = (0,\ 0,\ z_1 + C_4 e^{2z_2}).$$

Наличие в обсуждаемом базисе еще и поля $e_5 = (0, 0, 1)$ означает, что определяющая функция $\Phi(z_1, z_2, w)$ любой интегральной поверхности алгебры с таким базисом не зависит от переменной w. Следовательно, все такие поверхности (если они существуют) вырождены по Леви.

Предложение 2 доказано.

Замечание. Вопрос о существовании или невозможности существования таких вырожденных однородных поверхностей мы здесь не обсуждаем.

3. Получение уравнения однородной гиперповерхности

Теперь мы получим уравнения однородных поверхностей, являющихся орбитами алгебры (6). Уравнение каждой такой поверхности M ищем в виде

$$v = F(y_1, x_2, y_2). \tag{11}$$

При этом определяющая функция $\Phi = -v + F$ поверхности удовлетворяет системе трех уравнений в частных производных

$$\mathrm{Re}\left(e_k\left(\Phi\right)\big|_M\right) \equiv 0, (k = 2, 3, 4). \tag{12}$$

Аналогичные уравнения, отвечающие полям e_1, e_5 и означающие независимость определяющей функции Φ от переменных x_1, u, фактически уже учтены в виде (11).

Итак, тройка уравнений (12) имеет в вещественной форме вид

$$\begin{cases} 2y_1\frac{\partial F}{\partial y_1} - x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} - y_2\frac{\partial F}{\partial y_2} - F = 0, \\ -2x_1y_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + (x_1x_2 - y_1y_2 - u)\frac{\partial F}{\partial x_2} + (x_1y_2 - x_2y_1 - F)\frac{\partial F}{\partial y_2} + (x_1F + y_1u) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} - y_1 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Заметим, что во втором уравнении системы (13) имеются две группы слагаемых, содержащих переменные x_1 и u. Но с учетом первого и третьего уравнений каждая такая группа тождественно равна нулю. Поэтому получаем упрощенный вариант системы (13) в виде

$$\begin{cases} 2y_1\frac{\partial F}{\partial y_1} - x_2\frac{\partial F}{\partial x_2} - y_2\frac{\partial F}{\partial y_2} - F = 0, \\ -y_1y_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + (x_2y_1 - F)\frac{\partial F}{\partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} - y_1 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решение самого простого из этих уравнений $F(y_1, x_2, y_2) = x_2y_1 + G(y_1, y_2)$ с произвольной аналитической функцией $G(y_1, y_2)$ подставим в два оставшихся уравнения системы (14). Эти два уравнения имеют теперь вид

$$2y_1\frac{\partial G}{\partial y_1} - y_2\frac{\partial F}{\partial y_2} = G, \quad G\frac{\partial G}{\partial y_2} = -y_1y_2^2.$$

Решение первого из них есть функция вида

$$G(y_1, y_2) = \frac{1}{y_2}\varphi(y_1y_2^2)$$

с произвольной функцией одного переменного φ.

Тогда последнее уравнение изучаемой системы примет вид ОДУ

$$\xi\mu'(\xi) - \mu = -\xi^2,$$

где $\xi = y_1y_2^2$, $\mu = \varphi^2$.

Решение этого ОДУ $\mu = -\xi^2 + C\xi$ с произвольной вещественной константой C позволяет записать решение системы (13) в виде

$$(Gy_2)^2 + (y_1y_2^2)^2 = C(y_1y_2^2). \tag{15}$$

После сокращения уравнения (15) на $y_2^2 \neq 0$ и перехода к исходным переменным задачи получаем уравнения искомых однородных поверхностей в виде

$$(v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = C y_1. \tag{16}$$

Остается заметить, что при $C = 0$ уравнение (16) описывает не 5-мерную (гипер) поверхность, а объединение двух вещественных 4-мерных поверхностей

$$\Gamma_1 = \{y_1 = 0,\ v = 0\} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \{y_2 = 0,\ v = x_2 y_1\}$$

в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$.

При $C \neq 0$ замена

$$z_1 \to \left(\frac{1}{C}\right) z_1,\ \ z_2 \to C z_2$$

превращает параметр C этого уравнения в единицу, а само это уравнение задает индефинитную вещественную гиперповерхность (2).

Теперь для завершения доказательства теоремы 1 остается убедиться в простой однородности этой поверхности.

4. Нормальные формы и задача об однородности

Ответы на многие вопросы, связанные с вещественными гиперповерхностями комплексных пространств, удается получать с использованием понятия нормальной формы Мозера (см. [10], а также [3; 4]).

Напомним, что уравнение всякой невырожденной по Леви вещественно-аналитической гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ может быть приведено (вблизи любой своей точки) к виду

$$v = \langle z, z \rangle + N_{220}(z, \bar{z}) + \ldots . \tag{17}$$

Здесь $\langle z, z \rangle$ — невырожденная эрмитова форма (форма Леви поверхности), $N_{220}(z, \bar{z})$ — однородный многочлен бистепени $(2, 2)$ по переменным $z = (z_1, z_2)$ и $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, а многоточия означают слагаемые более высоких степеней по переменным z, $\bar{z}$, $u = \operatorname{Re} w$. При этом многочлен N_{220} является элементом специального пространства $\mathcal{N}_{22}$ многочленов бистепени $(2, 2)$, определяемого формой Леви поверхности.

Процедура приведения к такой нормальной форме является вполне конструктивной, хотя и достаточно громоздкой в силу ее многошагового характера. Для целей нашей статьи достаточно обсудить многочлены N_{220} из уравнений вида (17) для нескольких семейств однородных поверхностей.

Относительно подробно мы рассмотрим нормализацию уравнения (16) при $C = 1$, то есть

$$(v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1,$$

переписанного (после замены $z = i z^*$) в виде

$$v = -x_1 y_2 + \sqrt{x_1 - x_1^2 x_2^2}. \tag{18}$$

Точкой поверхности, вблизи которой проводится нормализация, выберем $Q(1, 0, i) \in \in \mathbb{C}^3$. Разложение функции

$$F = -1 - (1 + x_1) y_2 + \sqrt{(1 + x_1) - (1 + x_1)^2 x_2^2}$$

в степенной ряд имеет вид

$$v = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots,$$

в котором отдельные тейлоровские компоненты определяются формулами

$$F_2 = -x_1 y_2 - \frac{1}{8}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2, \quad F_3 = \frac{1}{16}x_1^3 - \frac{3}{4}x_1 x_2^2, \quad F_4 = -\frac{5}{128}x_1^4 - \frac{3}{16}x_1^2 x_2^2 - \frac{1}{8}x_2^4.$$

При возвращении к комплексным переменным (с одновременным растяжением координат по формулам $x_k = z_k + \bar{z}_k$) получаем

$$F_2 = -\frac{1}{8}\left(z_1 + \bar{z}_1\right)^2 + i\left(z_1 + \bar{z}_1\right)\left(z_2 - \bar{z}_2\right) - \frac{1}{2}\left(z_2 - \bar{z}_2\right)^2$$

и эрмитову часть этого многочлена, то есть форму Леви обсуждаемой поверхности,

$$H(z, \bar{z}) = i z_2 \bar{z}_1 - i z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_2 - \frac{1}{4} z_1 \bar{z}_1. \tag{19}$$

Для приведения этой формы к виду

$$H = z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \tag{20}$$

воспользуемся линейной заменой координат

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(z_1^* + z_2^*\right), \quad z_2 = -i\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(z_1^* + z_2^*\right) + \left(z_1^* - z_2^*\right)\right), \quad w = 2w^*.$$

Замечание. Приведение эрмитовой формы к каноническому виду может быть реализовано различными линейными преобразованиями. Выбранное нами преобразование обеспечивает при переходе к комплексным координатам наличие только вещественных коэффициентов у наиболее важных при нормализации многочленов F_3, F_4.

Вторым шагом после такой замены освобождаем полученное уравнение

$$v = \left(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1\right) + F_3(z, \bar{z}) + F_4(z, \bar{z}) + \ldots \tag{21}$$

от слагаемого F_3. При этом голоморфные слагаемые, входящие в $F_3(z, \bar{z})$ (как, впрочем, и в остальные $F_k(z, \bar{z})$ при $k \geqslant 1$), не оказывают влияния на старшие компоненты нормализуемого уравнения и «просто удаляются» из него (см. [10]).

Еще одна группа слагаемых из $F_3(z, \bar{z})$ имеет вид

$$Q_1(z)\bar{z}_1 + Q_2(z)\bar{z}_2 \tag{22}$$

с квадратичными формами

$$Q_1(z) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) z_1^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right) z_1 z_2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\right) z_2^2,$$

$$Q_2(z) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right) z_1^2 + \left(-2 - \sqrt{3}\right) z_1 z_2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1\right) z_2^2$$

от двух комплексных переменных z_1, z_2.

С учетом (22) мы строим квадратичную вектор-функцию $f_2(z) = (Q_2(z), Q_1(z))$ и поправочное слагаемое

$$\Delta_{22} = -\langle f_2, f_2 \rangle = -\left(Q_2(z)\overline{Q_1(z)} + Q_1(z)\overline{Q_2(z)}\right).$$

После замены

$$z^* = z + f_2 + \ldots, \quad w^* = w + \ldots$$

уравнение нормализуемой поверхности примет вид

$$v = (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + H_{22}(z, \bar{z}) + \sum_{k,l \geqslant 2,\, k+l \geqslant 5} H_{kl}(z, \bar{z}),$$

где $H_{22} = F_{22} + \Delta_{22}$.

Приведем развернутую запись многочлена

$$\begin{gathered} H_{22} = A_1|z_1|^4 + A_2|z_1|^2|z_2|^2 + A_3|z_2|^4 + (Bz_1^2\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{B}z_1z_2\bar{z}_1^2) + \\ + (Cz_1z_2\bar{z}_2^2 + \bar{C}z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2) + (Dz_1^2\bar{z}_2^2 + \bar{D}z_2^2\bar{z}_1^2), \end{gathered} \tag{23}$$

каждый моном которого имеет вторую степень по переменной z и вторую — по $\bar{z}$. В нашем случае все коэффициенты этого многочлена являются вещественными и определяются формулами

$$\begin{gathered} A_1 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad A_2 = -\frac{4}{3}, \quad A_3 = -\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ B = \frac{7}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad C = \frac{7}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad D = \frac{2}{3}. \end{gathered}$$

При этом при «простейшей нормализации» многочлен N_{220} из нормального уравнения обсуждаемой поверхности (21) равен (см.: [3; 4]) проекции многочлена H_{22} в пространство $\mathcal{N}_{22}$.

Лемма 4 (предложение 1.2, [3]). *В случае формы Леви $\langle z, z \rangle = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$ проекция многочлена* (23) *в пространство $\mathcal{N}_{22}$ описывается формулами*

$$\begin{gathered} (F_{22})_{\mathcal{N}} = \lambda_1|z_1|^4 + \lambda_2\left(4|z_1|^2|z_2|^2 - (z_1^2\bar{z}_2^2 + z_2^2\bar{z}_1^2)\right) + \lambda_3|z_2|^4 + \\ + i\mu_1(z_1^2\bar{z}_1\bar{z}_2 - z_1z_2\bar{z}_1^2) + i\mu_2(z_1z_2\bar{z}_2^2 - z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2), \end{gathered}$$

где

$$\lambda_1 = A_1, \lambda_2 = \frac{1}{6}(A_2 - 2\operatorname{Re} D), \lambda_3 = A_3, \mu_1 = \operatorname{Im} B, \mu_2 = \operatorname{Im} C.$$

В силу этой леммы получаем набор коэффициентов $(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \mu_1, \mu_2)$ многочлена N_{220} из нормального уравнения поверхности (18), равный

$$\left(-\frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{4}{9}, \quad -\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}, 0, 0\right). \tag{24}$$

Растяжение переменных с одновременной симметрией

$$z_1 \to -rtz_1, \quad z_2 \to \frac{r}{t}z_2, \quad w \to -r^2w \tag{25}$$

сохраняет нормальный вид уравнения (17) и форму Леви $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1$ обсуждаемой поверхности при произвольных положительных r, t.

Ненулевые коэффициенты многочлена N_{220} изменяются при замене координат (25) по формулам

$$\lambda_1 \to -r^2 t^4 \lambda_1, \quad \lambda_2 \to -r^2 \lambda_2, \quad \lambda_3 \to -\frac{r^2}{t^4}\lambda_3$$

и становятся положительными.

Полагая $t^8 = \lambda_3/\lambda_1,\ r^{-4} = \lambda_1\lambda_3$, мы превратим набор (24) в

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2) = \left(1, \frac{2}{3}, 1, 0, 0\right). \tag{26}$$

Итог описанной нормализации поверхности (18) можно сформулировать следующим образом.

Предложение 3. *Существует нормальное по Мозеру уравнение вида* (17) *поверхности* (18)*, в котором коэффициенты многочлена* N_{220} *имеют вид* (26).

Отметим, что такой набор является частным случаем наборов типа 1 из предложения 1.5 в [3]. В силу теоремы 3.6 из этой же работы размерность алгебры симметрий обсуждаемой поверхности не превышает 6.

Предложение 4. *Поверхность* (18) *является* просто однородной*, то есть ее максимальная алгебра симметрий является в точности 5-мерной.*

Доказательство этого утверждения следует из сравнения голоморфно инвариантного набора (26) с аналогичными наборами для однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, имеющих «богатые» алгебры симметрий и индефинитную форму Леви (20).

Согласно результату [11] (теорема 1.1), для любой голоморфно-однородной невырожденной по Леви вещественной гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^3$ с нетривиальной алгеброй симметрий справедливо хотя бы одно из следующих утверждений:

1. M голоморфно эквивалентна квадрике $v = |z_1|^2 \pm |z_2|^2$ (и тогда многочлен N_{220} в любом ее нормальном уравнении является нулевым),
2. M голоморфно эквивалентна одной из трубчатых поверхностей приведенного в работе списка (содержащего 21 тип уравнений),
3. M попадает в картановский или винкельманновский тип.

Остается уточнить, что поверхности картановского (и псевдо-картановского, см. [3]) типа имеют номер 4 в упомянутом выше классификационном предложении 1.5 из [3], а винкельманновский тип имеет в этом предложении номер 6.

Из 21 типа трубчатых поверхностей работы [11] 6-мерные алгебры симметрий имеют лишь 12 типов, включенных в таблицы 7 и 8. При этом все поверхности, попавшие в таблицу 7, имеют сводимые к винкельманновскому типу уравнения вида

$$v = \varphi(x_1)x_2 + \psi(x_1).$$

В частности, это 8 типов поверхностей, имеющих 6-мерные алгебры симметрий (α и β — вещественные параметры):

$$v = x_1x_2 + x_1^{\alpha}, \quad v = x_1x_2 + \ln x_1, \quad v = x_1x_2 + x_1^2 \ln x_1, \quad v = x_1x_2 + x_1^3 \ln x_1,$$
$$v = x_1x_2 + e^{x_1}, \quad v\cos x_1 + x_2 \sin x_1 = e^{\beta x_1}, \quad v = x_2e^{x_1} - x_1^2,$$

В таблице 8 имеется 4 типа поверхностей с 6-мерными алгебрами симметрий. Это

$$vx_1 = x_2^2 - \varepsilon x_1^\alpha, \quad v = x_2^2 + \varepsilon x_1^\alpha, \quad v = x_2^2 + \varepsilon x_1 \ln x_1, \quad v^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 = 1, \tag{27}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$.

Отметим, что в этом списке содержатся уравнения поверхностей как с индефинитной, так и с положительно определенной формой Леви. При этом индефинитные поверхности из (27) приводятся несложными преобразованиями, аналогичными описанным в начале этого раздела, к виду

$$v = (|z_1|^2 - |z_2|^2) + (|z_1|^4 + 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) + \ldots .$$

Такой вид соответствует, согласно [3], так называемым псевдо-картановым поверхностям, входящим в качестве отдельного подтипа в тип 4 классификационного предложения 1.5 из [3].

Тем самым предложение 4, а с ним и основной результат настоящей статьи — теорему 1, можно считать доказанными.

Замечание. Вопрос о возможной голоморфной эквивалентности поверхности (18) какому-либо известному однородному многообразию с 5-мерной алгеброй симметрий мы здесь не рассматриваем. Семейство известных однородных (и, в том числе, просто однородных) поверхностей достаточно велико. Например, оно содержит все трубчатые многообразия над аффинно-однородными поверхностями из $\mathbb{R}^3$ (обширный полный список таких поверхностей получен в [12]). Детальный анализ всего этого семейства в связи с обсуждаемой задачей выходит за рамки настоящей статьи.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа второго автора поддержана грантом РФФИ (проект № 17-01-00592-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. С. О голоморфных реализациях нильпотентных алгебр Ли / Р. С. Акопян, А. В. Лобода // Современные методы и проблемы математической гидродинамики – 2018 : материалы Междунар. науч. конф. (3–8 мая 2018 г.). — Воронеж : Изд-во Воронеж. гос. пед. ун-та, 2018. — С. 200–204.

2. Атанов, А. В. Голоморфные реализации разложимых пятимерных алгебр Ли / А. В. Атанов, А. В. Лобода // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. : Воронежская зимняя математическая школа (28 янв. – 2 февр. 2019 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — С. 24–26.

3. Лобода, А. В. Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Труды МИАН. — 2001. — Т. 235. — С. 114–142.

4. Лобода, А. В. Однородные строго псевдо-выпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии / А. В. Лобода // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 12. — С. 3–24. — DOI: https://doi.org/10.4213/sm614.

5. Мубаракзянов, Г. М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г. М. Мубаракзянов // Известия вузов. Математика. — 1963. — № 3. — С. 99–106.

6. Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М. : Мир, 1989. — 637 с.

7. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ : в 2 ч. Ч. 2. Функции нескольких переменных / Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1985. — 464 с.

8. Beloshapka, V. K. Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic / V. K. Beloshapka, I. G. Kossovskiy // J. Geom. Anal. — 2010. — Vol. 20, № 3. — P. 538–564.

9. Cartan, E. Sur la géométrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes: I / E. Cartan // Ann. Math. Pura Appl. — 1932. — Vol. 11, № 4. — P. 17–90.

10. Chern, S. S. Real hypersurfaces in complex manifolds / S. S. Chern, J. K. Moser // Acta Math. — 1974. — Vol. 133. — P. 219–271.

11. Doubrov, B. Homogeneous Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ / B. Doubrov, A. Medvedev, D. The. — arXiv.org. — Electronic text data. — Mode of access: http://arxiv.org/abs/1711.02389. — Title from screen.

12. Doubrov, B. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry. / B. Doubrov, B. Komrakov, M. Rabinovich // Geometry and topology of submanifolds, VIII, Proc. of the 1995 Nordfjordeid Conference. — Singapore, 1996. — P. 168–178.

13. Fels, G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — 2008. — Vol. 201. — P. 1–82.

REFERENCES

1. Akopyan R.S., Loboda A.V. O golomorfnykh realizatsiyakh nilpotentnykh algebr Li [On Holomorphic Realizations of Nilpotent Lie Algebras]. *Sovremennye metody i problemy matematicheskoy gidrodinamiki – 2018: materialy Mezhdunar. nauch. konf. (3–8 maya 2018 g.)* [Contemporary Methods and Problems of Mathematical Hydrodynamics – 2018 (May 3 – May 8, 2018, Voronezh)] . Voronezh, VSPU Publ., 2018, pp. 200-204.

2. Atanov A.V., Loboda A.V. Golomorfnye realizatsii razlozhimykh pyatimernykh algebr Li [Holomorphic Realizations of Decomposable Lie Algebras]. *Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy: materialy Mezhdunar. konf.: Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola (28 yanv. – 2 fevr. 2019 g.)* [Voronezh Winter Mathematical School «Contemporary Methods in Theory of Functions and Adjacent Problems» (January 28 – February 2, 2019, Voronezh)] . Voronezh, VSU Publ., 2019, pp. 24-26.

3. Loboda A.V. Odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii [Homogeneous Real Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with Two-Dimensional Isotropy Groups]. *Trudy MIAN* [Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics], 2001, vol. 235, pp. 114-142.

4. Loboda A.V. Odnorodnye strogo psevdo-vypuklye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ s dvumernymi gruppami izotropii [Homogeneous Strictly Pseudoconvex Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with Two-Dimensional Isotropy Groups]. *Matem. sb.* [Sbornik: Mathematics], 2001, vol. 192, no. 12, pp. 3-24. DOI: https://doi.org/10.4213/sm614.

5. Mubarakzyanov G.M. Klassifikatsiya veshchestvennykh struktur algebr Li pyatogo poryadka [Classification of Real Structures of Lie Algebras of Fifth Order]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1963, no. 34, pp. 39-47.

6. Olver P. *Prilozheniya grupp Li k differentsialnym uravneniyam* [Applications of Lie Groups to Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1989. 637 p.

7. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyy analiz: v 2 ch. Ch. 2. Funktsii neskolkikh peremennykh* [Introduction to Complex Analysis: Functions of Several Variables]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 464 p.

8. Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G. Homogeneous Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, Associated with a Model CR-Cubic. *J. Geom. Anal.*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 538-564.

9. Cartan E. Sur la Géométrie Pseudoconforme des Hypersurfaces de Deux Variables Complexes: I. *Ann. Math. Pura Appl.*, 1932, vol. 11, no. 4, pp. 17-90.

10. Chern S.S., Moser J.K. Real Hypersurfaces in Complex Manifolds. *Acta Math.*, 1974, vol. 133, pp. 219-271.

11. Doubrov B., Medvedev A., The D. *Homogeneous Levi non-degenerate hypersurfaces in* $\mathbb{C}^3$. arXiv.org. URL: http://arxiv.org/abs/1711.02389.

12. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry. *Geometry and topology of submanifolds, VIII, Proc. of the 1995 Nordfjordeid Conference*. Singapore, 1996, pp. 168-178.

13. Fels G., Kaup W. Classification of Levi Degenerate Homogeneous CR-Manifolds in Dimension 5. *Acta Math.*, 2008, vol. 201, pp. 1-82.

ON THE ORBITS OF ONE NON-SOLVABLE 5-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA

Artem Viktorovich Atanov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Digital Technology,
Voronezh State University
atanov.cs@gmail.com
Universitetskaya Sq., 1, 394018 Voronezh, Russian Federation

Alexander Vasilyevich Loboda

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Applied Mathematics and Mechanics,
Voronezh State Technical University
lobvgasu@yandex.ru
20 let Oktyabrya St., 84, 394006 Voronezh, Russian Federation

Abstract. This paper studies holomorphic homogeneous real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ associated with the unique non-solvable indecomposable 5-dimensional Lie algebra g_5 (in accordance with Mubarakzyanov's notation). Unlike many other 5-dimensional Lie algebras with "highly symmetric" orbits, non-degenerate orbits of g_5 are "simply homogeneous", i.e. their symmetry algebras are exactly 5-dimensional. All those orbits are equivalent (up to holomorphic equivalence) to the specific indefinite algebraic surface of the fourth order.

The proofs of those statements involve the method of holomorphic realizations of abstract Lie algebras. We use the approach proposed by Beloshapka and Kossovskiy, which is based on the simultaneous simplification of several basis vector fields. Three auxiliary lemmas formulated in the text let us straighten two basis vector fields of g_5 and significantly simplify the third field.

There is a very important assumption which is used in our considerations: we suppose that all orbits of g_5 are Levi non-degenerate. Using the method of holomorphic realizations, it is easy to show that one need only consider two sets of holomorphic vector fields associated with g_5. We prove that only one of these sets leads to Levi non-degenerate orbits. Considering the commutation relations of g_5, we obtain a simplified basis of vector fields and a corresponding integrable system of partial differential equations. Finally, we get the equation of the orbit (unique up to holomorphic transformations)

$$(v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1,$$

which is the equation of the algebraic surface of the fourth order with the indefinite Levi form.

Then we analyze the obtained equation using the method of Moser normal forms. Considering the holomorphic invariant polynomial of the fourth order corresponding to our equation, we can prove (using a number of results obtained by A.V. Loboda) that the upper bound of the dimension of maximal symmetry algebra associated with the obtained orbit is equal to 6. The holomorphic invariant polynomial mentioned above differs from the known invariant polynomials of Cartan's and Winkelmann's types corresponding to other hypersurfaces with 6-dimensional symmetry algebras.

Key words: homogeneous manifold, holomorphic transformations, non-solvable Lie algebras, vector field, real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$.