DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.3.4

УДК 517.927.25
ББК 22. 161

Дата поступления статьи: 29.09.2018
Дата принятия статьи: 01.03.2019

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Турсун Камалдинович Юлдашев

Кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики,
Сибирский государственный университет науки и технологий
tursun.k.yuldashev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9346-5362
Просп. им. газеты «Красноярский рабочий», 31, 660014 Красноярск,
Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрены вопросы разрешимости и построения решений одной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром, интегральными условиями и спектральными параметрами. Вычислены значения спектральных параметров и построены соответствующие этим значениям решения. Изучены особенности, возникающие при интегрировании уравнения. Установлены критерии разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, нелокальная краевая задача, вырожденное ядро, интегральные условия, спектральные параметры.

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению граничных задач для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Изучение спектральных свойств и построение решений для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами представляют большой теоретический и практический интерес. Интегро-дифференциальные уравнения являются математическими моделями протекания многих физических процессов и работы технических систем [8; 16]. В [12] показано приложение интегро-дифференциальных уравнений в теории систем автоматического регулирования. В работах [1–3; 6; 9; 10; 15] для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений ставятся и изучаются разные постановки задач. Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений рассматривались в работах [4; 5; 7; 17]. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденным ядром изучались в [11; 13; 14].

В настоящей работе изучается разрешимость нелокальной интегральной задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с вырожденным ядром и спектральными параметрами. В вопросе изучения разрешимости важную роль играет наличие спектральных параметров. Вычисляются значения спектральных параметров, для которых устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи и строятся соответствующие решения.

На отрезке рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) + \nu \int\limits_0^T K(t,s)u(s)\,ds = 0 \tag{1}$$

при следующих интегральных условиях

$$u(T) + \int\limits_0^T u(t)\,dt = \alpha, \qquad u'(T) + \int\limits_0^T u'(t)\,t\,dt = \beta, \tag{2}$$

где $T > 0$ — заданное действительное число; $\lambda > 0$ — действительный спектральный параметр; α, $\beta = \mathrm{const}$; ν — действительный ненулевой спектральный параметр и

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)b_i(s), \quad 0 \neq a_i(t),\ b_i(s) \in C[0;T].$$

Здесь предполагается, что каждая из систем функций $\{a_i(t)\}_{i=1}^k$ и $\{b_i(s)\}_{i=1}^k$ линейно независима.

2. Метод вырожденного ядра

С учетом вырожденности ядра уравнение (1) запишем в следующем виде

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = -\nu \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{k} a_i(t)b_i(s)u(s)\,ds. \tag{3}$$

Вводя обозначения

$$\tau_i = \int\limits_0^T b_i(s)u(s)\,ds, \tag{4}$$

перепишем уравнение (3) в следующем виде

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = -\nu \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\tau_i. \tag{5}$$

Решая неоднородное дифференциальное уравнение (5), получим

$$u(t) = A_1 \cos \lambda t + A_2 \sin \lambda t + \eta(t), \tag{6}$$

где A_1, A_2 — неизвестные постоянные и

$$\eta(t) = -\frac{\nu}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \, h_i(t), \quad h_i(t) = \int_0^t \sin \lambda(t-s) a_i(s) ds, \quad i = \overline{1,\, k}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (6) воспользуемся интегральными условиями (2), и относительно этих коэффициентов мы приходим к системе линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} A_1 \sigma_1(\lambda) + A_2 \sigma_2(\lambda) &= \varphi_0, \\ A_1 \sigma_3(\lambda) + A_2 \sigma_4(\lambda) &= \psi_0, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\sigma_1(\lambda) = \frac{\lambda \cos \lambda T + \sin \lambda T}{\lambda}, \quad \sigma_2(\lambda) = \frac{-\cos \lambda T + \lambda \sin \lambda T + 1}{\lambda},$$

$$\sigma_3(\lambda) = \frac{\lambda \cos \lambda T - (1+\lambda^2) \sin \lambda T}{\lambda}, \quad \sigma_4(\lambda) = \frac{(1+\lambda^2) \cos \lambda T + \lambda T \sin \lambda T - 1}{\lambda},$$

$$\varphi_0 = \alpha - \left(\eta(T) + \int_0^T \eta(t)\, dt \right), \quad \psi_0 = \beta - \left(\eta'(T) + \int_0^T t\, \eta'(t)\, dt \right).$$

Для однозначного определения A_1 и A_2 из СЛУ (7) вычислим значения спектрального параметра λ в коэффициентах $\sigma_i(\lambda)$, $i = \overline{1,4}$. Коэффициенты $\sigma_i(\lambda)$, $i = \overline{1,4}$ могут равняться нулю при некоторых значениях параметра λ из положительной полуоси $(0; \infty)$, но эти коэффициенты не могут обращаться в нуль одновременно.

1. Пусть $\sigma_1(\lambda) = 0$. Получаем уравнение $\lambda \cos \lambda T + \sin \lambda T = 0$. Отсюда имеем тригонометрическое уравнение $\operatorname{tg} \lambda T = -\lambda$.

2. Пусть $\sigma_2(\lambda) = 0$. Получаем тригонометрическое уравнение $\cos \lambda T - \lambda \sin \lambda T = 1$.

3. Пусть $\sigma_3(\lambda) = 0$. Отсюда придем к тригонометрическому уравнению

$$\operatorname{tg} \lambda T = \frac{\lambda T}{1+\lambda^2}.$$

4. Положим $\sigma_4(\lambda) = 0$. Это эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$\cos \left(\lambda T - \arccos \frac{1+\lambda^2}{\sqrt{(1+\lambda^2)^2 + (\lambda T)^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)^2 + (\lambda T)^2}}.$$

Множество значений спектрального параметра λ, состоящих из положительных решений уравнений $\sigma_m(\lambda) = 0$, обозначим Λ_m, $m = \overline{1,4}$. Покажем, что $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,4}$. Пусть $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda) = 0$. Согласно нашему предположению $\sigma_1^2(\lambda) + \sigma_2^2(\lambda) \neq 0$. Отсюда придем к тригонометрическому уравнению

$$\cos(\lambda T + \theta) = \frac{\lambda^2 + 2}{2\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \text{где } \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

и это уравнение должно иметь решения. Но оно неразрешимо, так как его правая часть больше единицы: $\frac{\lambda^2+2}{2\sqrt{1+\lambda^2}} > 1$. Следовательно, наше допущение о том, что $\sigma_1(\lambda) = \sigma_2(\lambda) = 0$ не верно. В других случаях данное утверждение доказывается аналогично.

Примем обозначение $\Lambda_5 = (0; \infty) \setminus \left(\bigcup\limits_{m=1}^{4} \Lambda_m \right)$.

Итак, при нахождении неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 из СЛУ (7) возможны только пять случаев: **1)** $\sigma_1(\lambda) = 0$; **2)** $\sigma_2(\lambda) = 0$; **3)** $\sigma_3(\lambda) = 0$; **4)** $\sigma_4(\lambda) = 0$; **5)** $\sigma_m(\lambda) \neq 0$, $m = \overline{1, 4}$. Из СЛУ (7) получаем, что

$$A_1 = \frac{\psi_0}{\sigma_3(\lambda)} - \frac{\varphi_0}{\sigma_2(\lambda)} \cdot \frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_3(\lambda)}, \quad A_2 = \frac{\varphi_0}{\sigma_2(\lambda)}, \qquad \lambda \in \Lambda_1; \tag{8}$$

$$A_1 = \frac{\varphi_0}{\sigma_1(\lambda)}, \quad A_2 = \frac{\psi_0}{\sigma_4(\lambda)} - \frac{\varphi_0}{\sigma_1(\lambda)} \cdot \frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_4(\lambda)}, \qquad \lambda \in \Lambda_2; \tag{9}$$

$$A_1 = \frac{\varphi_0}{\sigma_1(\lambda)} - \frac{\psi_0}{\sigma_1(\lambda)} \cdot \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_4(\lambda)}, \quad A_2 = \frac{\psi_0}{\sigma_4(\lambda)}, \qquad \lambda \in \Lambda_3; \tag{10}$$

$$A_1 = \frac{\psi_0}{\sigma_3(\lambda)}, \quad A_2 = \frac{\varphi_0}{\sigma_2(\lambda)} - \frac{\psi_0}{\sigma_2(\lambda)} \cdot \frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_3(\lambda)}, \qquad \lambda \in \Lambda_4; \tag{11}$$

$$A_1 = \varphi_0 \frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)} - \psi_0 \frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)}, \quad A_2 = -\varphi_0 \frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)} + \psi_0 \frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_5(\lambda)}, \qquad \lambda \in \Lambda_5, \tag{12}$$

где

$$\sigma_5(\lambda) = \sigma_1(\lambda) \cdot \sigma_4(\lambda) - \sigma_2(\lambda) \cdot \sigma_3(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda_5. \tag{13}$$

Покажем справедливость соотношения в (13). С этой целью предположим, что $\sigma_5(\lambda = 0, \lambda \in \Lambda_5$. Это условие эквивалентно тригонометрическому уравнению $(1 + T) \cos \lambda T - \lambda \sin \lambda T = 1 + T + \lambda^2$, которое преобразуется к простейшему тригонометрическому уравнению вида

$$\cos(\phi + \lambda T) = \frac{1 + T + \lambda^2}{\sqrt{(1+T)^2 + \lambda^2}}, \quad \text{где} \quad \phi = \arccos \frac{1 + T}{\sqrt{(1+T)^2 + \lambda^2}}.$$

Поскольку правая часть последнего уравнения больше единицы, то данное уравнение не имеет решений. Следовательно, наше допущение не верно. Отсюда следует справедливость соотношения в (13). Подставляя (8)–(12) в (6), получаем

$$u(t, \nu, \lambda) = \alpha B_m(t) + \beta C_m(t) + \frac{\nu}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \, D_{mi}(t), \quad \lambda \in \Lambda_m, \, m = \overline{1, 5}, \tag{14}$$

где

$$D_{mi}(t) = B_m(t) \left[\int\limits_0^T h_i(t) \, dt + h_i(T) \right] + C_m(t) \left[\int\limits_0^T t \cdot h_i'(t) \, dt + h_i'(T) \right] - h_i(t), \quad m = \overline{1, 5};$$

$$B_1(t) = \frac{\sin \lambda t}{\sigma_2(\lambda)} - \frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)} \cdot \frac{\cos \lambda t}{\sigma_3(\lambda)}, \qquad C_1(t) = \frac{\cos \lambda t}{\sigma_3(\lambda)};$$

$$B_2(t)=\frac{\cos\lambda t}{\sigma_1(\lambda)}-\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cdot\frac{\sin\lambda t}{\sigma_4(\lambda)},\qquad C_2(t)=\frac{\sin\lambda t}{\sigma_4(\lambda)};$$

$$B_3(t)=\frac{\cos\lambda t}{\sigma_1(\lambda)},\qquad C_3(t)=\frac{\sin\lambda t}{\sigma_4(\lambda)}-\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cdot\frac{\cos\lambda t}{\sigma_4(\lambda)};$$

$$B_4(t)=\frac{\sin\lambda t}{\sigma_2(\lambda)},\qquad C_4(t)=\frac{\cos\lambda t}{\sigma_3(\lambda)}-\frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}\cdot\frac{\sin\lambda t}{\sigma_3(\lambda)};$$

$$B_5(t)=\frac{\sigma_4(\lambda)\cos\lambda t-\sigma_3(\lambda)\sin\lambda t}{\sigma_5(\lambda)},\quad C_5(t)=\frac{-\sigma_2(\lambda)\cos\lambda t+\sigma_1(\lambda)\sin\lambda t}{\sigma_5(\lambda)};$$

$$h_i(t)=\int_0^t\sin\lambda(t-s)a_i(s)\,ds,\quad i=\overline{1,k}.$$

Подставляя (14) в (4), получаем систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\tau_i+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^k\tau_jH_{ij}^m=\alpha\Phi_{mi}+\beta\Psi_{m,i},\qquad i=\overline{1,k},\quad m=\overline{1,5}, \tag{15}$$

где

$$H_{ij}^m=\int_0^T b_i(s)D_{mj}(s)\,ds,\quad \Phi_{mi}=\int_0^T b_i(s)B_{mi}\,ds,\quad \Psi_{mi}=\int_0^T b_i(s)C_{mi}(s)\,ds.$$

Отметим, что из линейной независимости каждой из систем функций $\{a_i(t)\}_{i=1}^k$ и $\{b_i(s)\}_{i=1}^k$ следует, что $H_{ij}^m\neq0$. Рассмотрим следующие матрицы:

$$P_m(\nu,\lambda)=\begin{pmatrix}1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11}^m & \frac{\nu}{\lambda}H_{12}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k}^m\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21}^m & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{22}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k}^m\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1}^m & \frac{\nu}{\lambda}H_{k2}^m & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk}^m\end{pmatrix},$$

$$P_{mi}(\nu,\lambda)=\begin{pmatrix}1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i-1)}^m & \Phi_{m1} & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i+1)}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k}^m\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i-1)}^m & \Phi_{m2} & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i+1)}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k}^m\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i-1)}^m & \Phi_{mk} & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i+1)}^m & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk}^m\end{pmatrix},$$

$$Q_{mi}(\nu,\lambda)=\begin{pmatrix}1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i-1)}^m & \Psi_{m1} & \frac{\nu}{\lambda}H_{1(i+1)}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k}^m\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i-1)}^m & \Psi_{m2} & \frac{\nu}{\lambda}H_{2(i+1)}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k}^m\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i-1)}^m & \Psi_{mk} & \frac{\nu}{\lambda}H_{k(i+1)}^m & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk}^m\end{pmatrix},$$

где $i=\overline{1,k}$, $m=\overline{1,5}$.

СЛУ (15) однозначно разрешима при любых конечных правых частях, если выполняется следующее условие невырожденности определителя Фредгольма

$$\Delta_m(\nu,\lambda)=\det P_m(\nu,\lambda)\neq0. \tag{16}$$

Определитель $\Delta_m(\nu,\lambda)$ в (16) есть многочлен относительно $\frac{\nu}{\lambda}$ степени не выше k. Уравнение $\Delta_m(\nu,\lambda)=0$ имеет не более k различных корней. Их обозначим через μ_l^m, ($l=\overline{1,p_m}$, $1\le p_m\le k$. Тогда $\nu=\nu_{n+l}=\lambda_n\mu_l^m$ называются иррегулярными значениями второго спектрального параметра ν, где $n\in\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Другие значения второго спектрального параметра $\nu\ne\lambda_n\mu_l^m$ называются регулярными. Примем следующие обозначения счетных множеств

$$\Omega_m=\left\{(\nu,\lambda):\ \nu=\lambda\mu_l^m,\ \lambda\in\Lambda_m\right\},\qquad \widetilde{\Omega}_m=\left\{(\nu,\lambda):\ \nu\ne\lambda\mu_l^m,\ \lambda\in\Lambda_m\right\},$$
$$l=\overline{1,p_m},\quad 1\le p_m\le k,\quad m=\overline{1,5}.$$

3. Регулярный случай значений спектрального параметра ν

На регулярных спектральных множествах $\widetilde{\Omega}_m$ решения СЛУ (15) записываются в виде
$$\tau_i=\alpha\frac{\Delta_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)}+\beta\frac{\widetilde{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)},\quad i=\overline{1,k},\quad (\nu,\lambda)\in\widetilde{\Omega}_m,\tag{17}$$
где $\Delta_{mi}(\nu,\lambda)=\det P_{mi}(\nu,\lambda)$, $\widetilde{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)=\det Q_{mi}(\nu,\lambda)$, $m=\overline{1,5}$.

Подставляя (17) в (14), получаем
$$u(t,\nu,\lambda)=\alpha V_m(t,\nu,\lambda)+\beta W_m(t,\nu,\lambda),\quad (\nu,\lambda)\in\widetilde{\Omega}_m,\tag{18}$$
где
$$V_m(t,\nu,\lambda)=B_m(t)-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)}D_{mi}(t);$$
$$W_m(t,\nu,\lambda)=C_m(t)-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\widetilde{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)}D_{mi}(t).$$

Из функции (18) видно, что решения краевой задачи (1), (2) устойчивы по интегральным данным α и β. Действительно, если для каждого m положим, что $u_1(t,\nu,\lambda)$ и $u_2(t,\nu,\lambda)$ два различных решения нелокальной интегральной задачи (1), (2), соответствующие двум различным значениям интегральных данных α_1 и α_2, β_1 и β_2 и
$$|\alpha_1-\alpha_2|<\delta_1,\quad |\beta_1-\beta_2|<\delta_2,\quad 0<\delta_1,\ \delta_2=\mathrm{const},$$
то получаем
$$|u_1(t,\nu,\lambda)-u_2(t,\nu,\lambda)|\le(|\alpha_1-\alpha_2|+|\beta_1-\beta_2|)\cdot\chi_{m0}<(\delta_1+\delta_2)\cdot\chi_{m0}=\varepsilon,$$
где $\chi_{m0}=\max\left\{\max\limits_{0\le t\le T}|V(t,\nu,\lambda);\max\limits_{0\le t\le T}|W(t,\nu,\lambda)|\right\}<\infty$.

Аналогично убедимся, что решения краевой задачи (1), (2) малы при $|\nu|<1$, ($\nu\ne0$) и достаточно больших λ, если α и β малы. Действительно, если положим
$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2\chi_{m0}},\quad |\beta|<\frac{\varepsilon}{2\chi_{m0}},$$
то имеем оценку
$$|u(t,\nu,\lambda)|\le|\alpha|\cdot\chi_{m0}+|\beta|\cdot\chi_{m0}<\frac{\varepsilon}{2\chi_{m0}}\cdot\chi_{m0}+\frac{\varepsilon}{2\chi_{m0}}\cdot\chi_{m0}=\varepsilon.$$

Таким образом, доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Нелокальная краевая задача* (1), (2) *на отрезке* $[0;T]$ *однозначно разрешима при регулярных спектральных значениях из числового множества* $\widetilde{\Omega}_m$ *для каждого* m. *Решения этой задачи определяются формулой* (18) *и они устойчивы по интегральным данным* α *и* β. *Кроме того, если* α *и* β *малы, то и решения краевой задачи* (1), (2) *малы при* $|\nu| < 1$, $(\nu \neq 0)$ *и достаточно больших* λ.

4. Иррегулярный случай значений спектрального параметра

Рассмотрим множества иррегулярных значений спектральных параметров

$$\Omega_m = \left\{(\nu, \lambda): \ \nu = \lambda\mu_l^m, \ \lambda \in \Lambda_m\right\}, \quad m = \overline{1,5}.$$

В данном случае получаем однородную СЛУ (ОСЛУ)

$$\tau_i + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij}^m = 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad m = \overline{1,5},$$

если выполняются условия ортогональности

$$\Phi_{mi} = \int\limits_0^T b_i(s)B_m(s)\,ds = 0, \quad \Psi_{mi} = \int\limits_0^T b_i(s)C_m(s)\,ds = 0.$$

Для случаев $m = \overline{1,4}$ условия ортогональности имеют следующий вид

$$\sin\lambda T = 0, \quad \cos\lambda T = 1, \quad \lambda \in \Lambda_m, \quad m = \overline{1,4}. \tag{19}$$

Но, ни при каких значениях λ из множеств Λ_1, Λ_3 и Λ_4 условия (19) выполняться не будут. Поэтому в данных случаях задача (1), (2) не может иметь нетривиальные решения.

Рассмотрим случай $\lambda \in \Lambda_2$. Проверим выполняются ли условия

$$\sin\lambda T = 0, \quad \cos\lambda T = 1, \quad \lambda \in \Lambda_2. \tag{20}$$

Множество $\left\{\frac{2n\pi}{T}\right\}_{n=1}^{\infty}$ значений спектрального параметра λ обозначим через Λ_{20}. Для всех $\lambda \in \Lambda_{20}$ условия (20) выполняются. А для значений параметра λ из множества $\Lambda_2 \setminus \Lambda_{20} = \Lambda_{21}$ условия (20) не выполняются.

Воспользуемся обозначениями

$$\Omega_{20} = \left\{(\nu, \lambda): \ \nu = \lambda\mu_l^2, \ \lambda \in \Lambda_{20}\right\}, \quad \Omega_{21} = \left\{(\nu, \lambda): \ \nu = \lambda\mu_l^2, \ \lambda \in \Lambda_{21}\right\}.$$

На множестве Ω_{20} ОСЛУ имеет некоторое число p_2 $(1 \leq p_2 \leq k)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений $\left\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\right\}$, $l = \overline{1,p_2}$. Функции $u_l(t,\lambda) = \mu_l^2 \sum\limits_{i=1}^{k}\tau_i^{(l)}D_{2i}(t)$, $l = \overline{1,p_2}$, будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u(t,\lambda) = \mu_l^2\sum_{i=1}^{k}D_{2i}(t)\int\limits_0^T b_i(s)\,u(s,\lambda)\,ds, \quad (\nu,\lambda) \in \Omega_{20} \tag{21}$$

Общее решение однородного интегрального уравнения (21) можно записать в виде

$$u(t,\lambda)=\sum_{l=1}^{p_2}\gamma_l\,u_l(t,\lambda),\quad (\nu,\lambda)\in\Omega_{20}, \tag{22}$$

где γ_l — произвольные постоянные.

Теперь рассмотрим случай $(\nu,\lambda)\in\Omega_5$. В данном случае, условия ортогональности имеют вид

$$\int\limits_0^T(\sigma_4(\lambda)\cos\lambda T-\sigma_3(\lambda)\sin\lambda T)\,dt=0,\quad \lambda\in\Lambda_5, \tag{23}$$

$$\int\limits_0^T(-\sigma_2(\lambda)\cos\lambda T+\sigma_1(\lambda)\sin\lambda T)\,dt=0,\quad \lambda\in\Lambda_5. \tag{24}$$

Условие (23) эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$T\cos\lambda T-\lambda\sin\lambda T=T,$$

откуда получаем

$$\lambda=\frac{2n\pi}{T},\qquad \lambda=-\frac{2}{T}\arccos\frac{T}{\sqrt{T^2+\lambda^2}}+\frac{2n\pi}{T},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{25}$$

Аналогично условие (24) эквивалентно тригонометрическому уравнению $\cos\lambda T=1$, которое имеет положительные решения

$$\lambda=\frac{2n\pi}{T},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{26}$$

Пересечение множеств значений параметра λ, определенных формулами (25) и (26), есть множество $\Lambda_{20}=\left\{\frac{2n\pi}{T}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку множество $\Lambda_{20}\subset\Lambda_2$, то оно не входит в Λ_5. Поэтому в данном случае задача (1), (2) не имеет нетривиальных решений.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Нелокальная краевая задача* (1), (2) *на отрезке* $[0,T]$ *имеет бесконечное множество решений в виде функций* (22) *при иррегулярных парах спектральных значений* (ν,λ) *из числового множества* Ω_{20}. *Эта краевая задача не имеет нетривиальных решений при иррегулярных парах спектральных значений* (ν,λ) *из числовых множеств* Ω_1, Ω_{21}, Ω_3, Ω_4 *и* Ω_5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бободжанов, А. А. Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегродифференциальных уравнений в частных производных / А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, № 1. — С. 28—38. — DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11220.

2. Быков, Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений / Я. В. Быков. — Фрунзе : Изд-во Кирг. гос. унив-та, 1957. — 327 с.

3. Вайнберг, М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / М. М. Вайнберг // Итоги науки. — М. : ВИНИТИ, 1964. — С. 5–37.

4. Гордезиани, Д. Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д. Г. Гордезиани, Г. А. Авалишвили // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 1. — С. 94—103.

5. Иванчов, Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием / Н. И. Иванчов // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 4. — С. 547-–564.

6. Сидоров, Н. А. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями / Н. А. Сидоров // Дифференц. уравнения. — 1968. — Т. 4, № 7. — С. 1309—1316.

7. Тихонов, И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И. В. Тихонов // Изв. РАН. Серия Математическая. — 2003. — Т. 67, № 2. — С. 133–166.

8. Ушаков, Е. И. Статическая устойчивость электрических цепей / Е. И. Ушаков. — Новосибирск : Наука, 1988. — 273 с.

9. Фалалеев, М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркутского государственного университета. Серия «Математика». — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 90—102.

10. Юлдашев, Т. К. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с нелокальным интегральным условием / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 1 (32). — С. 11—23. — DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.2.

11. Юлдашев, Т. К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1, Математика. Физика. — 2017. — № 1 (38). — С. 42—54. — DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.

12. Юлдашев, Т. К. Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра / Т. К. Юлдашев // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 12. — С. 1687—1694. — DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118120105.

13. Юлдашев, Т. К. Обратная задача для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Benney-Luke с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Изв. вузов. Математика. — 2016. — № 9. — С. 59–67. — DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16090061.

14. Юлдашев, Т. К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром / Т. К. Юлдашев // Дифференц. уравнения. — 2017. — Т. 53, № 1. — С. 101–110. — DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117010095.

15. Юрко, В. А. Обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов первого порядка / В. А. Юрко // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, № 6. — С. 939—946.

16. Cavalcanti, M. M. Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Methods in the Appl. Sciences. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043–1053.

17. Yuldashev, T. K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel / T. K. Yuldashev // Lobachevskii journal of mathematics. — 2017. — Vol. 37, № 3. — P. 547—553.

REFERENCES

1. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. Regulyarizovannye asimptoticheskie resheniya nachalnoy zadachi dlya sistemy integrodifferentsialnykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Regularized Asymptotic Solutions of the Initial Problem for the System of Integro-Partial Differential Equations]. *Matem. zametki* [Math. Notes], 2017, vol. 102, no. 1, pp. 28—38. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm11220.

2. Bykov Ya.V. *O nekotorykh zadachakh teorii integro-differentsialnykh uravneniy* [On Some Problems of the Theory of Integro-Differential Equations]. Frunze, Kyrgyz State University Publ, 1957. 327 p.

3. Vaynberg M.M. Integro-differentsialnye uravneniya [Integro-Differential Equations]. *Itogi nauki.* Moscow, VINITI, 1964, pp. 5-37.

4. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Resheniya nelokalnykh zadach dlya odnomernykh kolebaniy sredy [Solving the Nonlocal Problems for One-Dimensional Medium Oscillation]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Modelling], 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94—103.

5. Ivanchov N.I. Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya s integralnym usloviem [Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions]. *Differents. uravneniya* [Differential equations], 2004, vol. 40, no. 4, pp. 547-–564.

6. Sidorov N.A. Reshenie zadachi Koshi dlya odnogo klassa integro-differentsialnykh uravneniy s analiticheskimi nelineynostyami [Solution of the Cauchy Problem for a Class of Integro-Differential Equations with Analytic Nonlinearities]. *Differents. uravneniya* [Differential equations], 1968, vol. 4, no. 7, pp. 1309—1316.

7. Tikhonov I.V. Teoremy edinstvennosti v lineynykh nelokalnykh zadachakh dlya abstraktnykh differentsialnykh uravneniy [Uniqueness Theorems for Linear Nonlocal Problems for Abstract Differential Equations]. *Izv. RAN. Seriya Matematicheskaya* [Izvestiya: Mathematics], 2003, vol. 67, no. 2, pp. 133-166.

8. Ushakov E.I. *Staticheskaya ustoychivost elektricheskikh tsepey* [Static Stability of Electrical Circuits]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1988. 273 p.

9. Falaleev M.V. Integro-differentsialnye uravneniya s fredgolmovym operatorom pri starshey proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh i ikh prilozheniya [Integro-Differential Equations with Fredholm Operator on the Highest Derivative in Banach Spaces and Their Applications]. *Izv. Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika»* [Izvestiya of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2012, vol. 5, no. 2, pp. 90—102.

10. Yuldashev T.K. Nelineynoe integro-differentsialnoe uravnenie psevdoparabolicheskogo tipa s nelokalnym integralnym usloviem [Nonlinear Integro-Differential Equation of Pseudoparabolic Type with Nonlocal Integral Condition]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2016, no. 1 (32), pp. 11—23. DOI: http://dx.doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.1.2.

11. Yuldashev T.K. Nelokalnaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo psevdoparabolicheskogo integro-differentsialnogo uravneniya s vyrozhdennym yadrom [Nonlocal Boundary Value Problem for a Nonhomogeneous Pseodoparabolic Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1, Matematika. Fizika* [Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics], 2017, no. 1 (38), pp. 42—54. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.

12. Yuldashev T.K. Ob odnoy nelokalnoy kraevoy zadache dlya nelineynogo integro-differentsialnogo uravneniya Fredgolma s vyrozhdeniem yadra [Nonlocal Boundary Value Problem for a Nonlinear Fredholm Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel]. *Differents. uravneniya* [Differential equations], 2018, vol. 54, no. 12, pp. 1687—1694. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064118120105.

13. Yuldashev T.K. Obratnaya zadacha dlya nelineynykh integro-differentsialnykh uravneniy tipa Benney-Luke s vyrozhdennym yadrom [Inverse Problem for a Nonlinear Benney–Luke Type Integro-Differential Equations with Degenerate Kernel]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2016, no. 9, pp. 59-67. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X16090061.

14. Yuldashev T.K. Smeshannaya zadacha dlya psevdoparabolicheskogo integro-differentsialnogo uravneniya s vyrozhdennym yadrom [Mixed Problem for Pseudoparabolic Integrodifferential Equation with Degenerate Kernel]. *Differents. uravneniya* [Differential equations], 2017, vol. 53, no. 1, pp. 101-110. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064117010095.

15. Yurko V.A. Obratnye zadachi dlya integro-differentsialnykh operatorov pervogo poryadka [Inverse Problems for First-Order Integro-Differential Operators]. *Matem. zametki* [Math. Notes], 2016, vol. 100, no. 6, pp. 939—946.

16. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Strong Damping. *Math. Methods in the Appl. Sciences*, 2001, vol. 24, pp. 1043-1053.

17. Yuldashev T.K. Determination of the Coefficient and Boundary Regime in Boundary Value Problem for Integro-Differential Equation with Degenerate Kernel. *Lobachevskii journal of mathematics*, 2017, vol. 37, no. 3, pp. 547—553.

FREDHOLM INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS AND SPECTRAL PARAMETERS

Tursun Kamaldinovich Yuldashev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Siberian State Aerospace University
tursun.k.yuldashev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9346-5362
Prosp. im. gazety “Krasnoyarskiy rabochiy” 31, 660014 Krasnoyarsk,
Russian Federation

Abstract. The integro-differential equations are of great interest from the point of view of applications. For ordinary integro-differential equations the different problems are posed and studied. In the cases, where the boundary of the flow domain of a physical process is not available for measurements, nonlocal conditions in integral form can serve as an additional information sufficiently for one-valued solvability of the problem. Nonlocal problems with integral conditions for differential and integro-differential equations were considered in the works of many mathematicians.

On the segment $[0;T]$ is considered the following integro-differential equation

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) + \nu \int_0^T K(t,s) u(s)\, ds = 0 \tag{1}$$

under the following integral conditions

$$u(T) + \int_0^T u(t)\, dt = \alpha, \qquad u'(T) + \int_0^T u'(t)\, t\, dt = \beta, \tag{2}$$

where $T > 0$ is given real number, $\lambda > 0$ is the real spectral parameter, $\alpha =$ $=$ const, $\beta =$ const, ν is the real nonzero spectral parameter,

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(s), \qquad a_i(t),\ b_i(s) \in C[0;T].$$

In current paper we assume that the functions $\{a_i(t)\}_{i=1}^{k}$ and $\{b_i(t)\}_{i=1}^{k}$ are linearly independent.

In this paper the questions of solvability and construction of solutions of a nonlocal boundary-value problem for a second-order Fredholm integro-differential equation with a degenerate kernel, integral conditions, and spectral parameters are considered. The values of the spectral parameters are calculated and the solutions corresponding to these values are constructed. The singularities arising in the course of integration are studied. Criteria for the solvability of the problem are established.

Key words: integro-differential equation, nonlocal boundary value problem, degenerate kernel, integral conditions, spectral parameters.