DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2019.4.2

УДК 517.547.3
ББК 22.16

Дата поступления статьи: 13.12.2018
Дата принятия статьи: 5.08.2019

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В ТОЧКАХ, ОБРАЗУЮЩИХ ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

Михаил Петрович Овчинцев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики,
Московский государственный строительный университет
6714543@rambler.ru
Ярославское шоссе, 26, 129337 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей статье изучается задача оптимального восстановления производных высшего порядка от ограниченных аналитических функций, заданных в единичном круге в нуле по информации об их значениях в точках $z_1, \ldots, z_n$, образующими правильный многоугольник. Работа состоит из введения и двух разделов. Во введении приводятся необходимые понятия и результаты из работ К.Ю. Осипенко и С.Я. Хавинсона. В первом разделе устанавливаются некоторые свойства произведения Бляшке, которое имеет нули в точках $z_1, \ldots, z_n$. После этого вычисляется погрешность наилучшего метода приближения производных $f^{(N)}(0)$, $1 \leq N \leq n-1$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$. Здесь же выписывается соответствующая экстремальная функция. Во втором разделе устанавливается единственность линейного наилучшего метода приближения, а затем вычисляются его коэффициенты.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, наилучший метод приближения, погрешность наилучшего метода, экстремальная функция, линейный наилучший метод, коэффициенты линейного наилучшего метода.

Введение

Пусть $K = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг, а $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ — единичная окружность. Обозначим через $B^1(K) = \{f(z) : |f(z)| \leq 1,\, z \in K\}$ — множество аналитических функций, заданных в круге K. Пусть также

$$z_1 = R, \quad z_2 = Re^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad \ldots, \quad z_n = Re^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}} \; - \qquad (1)$$

точки, образующие правильный многоугольник, где $n \geq 3$, а $0 < R < 1$. Если $S(t_1, \ldots t_n)$ — любая комплексная функция n комплексных переменных, то погрешностью приближения методом S N-й производной $f^{(N)}(0)$ по информации о значениях $f(z_1)$, …, $f(z_n)$ называется следующая величина

$$r_n(S) = \sup_{f(x) \in B^1(K)} \left| f^{(N)}(0) - S(f(z_1), \ldots, f(z_n)) \right|.$$

Согласно работе К.Ю. Осипенко [4] существует линейный наилучший метод приближения

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$$

(здесь c_k — комплексные числа), для которого выполняются следующие равенства

$$r_n(S_0) = \inf_S r_n(S) = \sup_{\substack{f(z) \in B^1(K) \\ f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0}} \left| f^{(N)}(0) \right|. \tag{2}$$

В дальнейшем погрешность наилучшего метода приближения обозначаем $r_N(z_1, \ldots, z_n)$, то есть $r_N(z_1, \ldots, z_n) = r_n(S_0)$. Заметим, что задачи оптимального восстановления некоторых классов функций и их производных по значениям функций в конечном числе точек изучались во многих работах (см., например, [1–5; 7]. В работе [7] (см. также [4]) была решена задача оптимального восстановления значений функций, заданных в единичном круге и принадлежащих классу Харди H_p $(1 \leq p \leq \infty)$, в точке z_0 по их значениям в различных точках $z_1, \ldots, z_n$. В работе [5] рассматривалась аналогичная задача оптимального восстановления производных от функций класса H_p. При этом в работе [5] учитывались значения функций и их производных и в самой точке z_0. В статьях [1; 2] исследовали похожие задачи, но уже по значениям функций в точках, заданных с погрешностью. В настоящей работе не применяются результаты, полученные в статье [5], так как в ней не используются значения функций и их производных в нуле. Приведем некоторые результаты из работы [6] (см. также [8]).

Если $\omega(\zeta)$ — суммируемая на Γ функция, то выполняется соотношение двойственности

$$\sup_{f \in B^1(K)} \left| \int_\Gamma f(\zeta)\omega(\zeta) d\zeta \right| = \min_{\varphi \in H_1} \int_\Gamma |\omega(\zeta) - \varphi(\zeta)| |d\zeta|, \tag{3}$$

где H_1 — класс Харди. В рассматриваемом случае существуют экстремальные функции $f^*(z) \in B^1(K)$ и $\varphi^*(z) \in H_1$ для равенства (3). Причем, функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя e^{it} $(t \in \mathbb{R})$, а $\varphi^*(z)$ — единственна. Кроме того, функции $f^*(z) \in B^1(K)$ и $\varphi^*(z) \in H_1$ являются экстремальными тогда и только тогда, когда почти везде на Γ выполняется соотношение

$$f^*[\omega(\zeta) - \varphi^*(\zeta)] d\zeta = e^{i\delta} |\omega(\zeta) - \varphi^*(\zeta)| ds, \tag{4}$$

где δ — действительная константа. В работе [6] установлено следующее. Если $\omega(\zeta)$ является граничным значением на Γ мероморфной в $\bar{K}$ функции $\omega(z)$ с полюсами $\beta_1, \ldots, \beta_m$ (каждый полюс повторен столько раз, какова его кратность), то произведение

$$f^*(z)\left(\omega(z) - \varphi^*(z)\right)$$

является аналитической функцией (за исключением полюсов) вплоть до границы Γ и имеет в $\bar{K}$

$$M = m - 1 \tag{5}$$

нулей. Приведем еще две формулы, полученные в работе [3]:

$$\prod_{j=2}^{n}(R - z_j) = R^{n-1}n, \tag{6}$$

$$\prod_{j=2}^{n}(1 - \bar{z}_j R) = \frac{1 - R^{2n}}{1 - R^2}. \tag{7}$$

1. Нахождение погрешности наилучшего метода

Лемма 1. *Если*

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} -$$

конечное произведение Бляшке, в котором точки $z_1, \ldots, z_n$ определяются при помощи формулы (1), то справедливы соотношения

$$B(z) = B(e^{i\frac{2\pi}{n}} z), \quad z \in \bar{K}, \tag{8}$$

$$B(0) = -R^n, \tag{9}$$

$$B^{(j)}0) = 0, \quad 1 \leq j \leq n - 1. \tag{10}$$

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости равенства (8). В самом деле

$$B\left(e^{i\frac{2\pi}{n}} z\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}} z - R}{1 - Re^{i\frac{2\pi}{n}} z} \cdot \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}} z - Re^{i\frac{2\pi}{n}}}{1 - Re^{-i\frac{2\pi}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}} z} \cdots \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}} z - Re^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}}{1 - Re^{-i(n-1)\frac{2\pi}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}} z} =$$
$$= \frac{z - Re^{-i\frac{2\pi}{n}}}{1 - Re^{i\frac{2\pi}{n}} z} \cdot \frac{z - R}{1 - Rz} \cdots \frac{z - Re^{i(n-2)\frac{2\pi}{n}}}{1 - Re^{-i(n-2)\frac{2\pi}{n}} z} = B(z).$$

Равенство (9) доказывается непосредственно. После этого докажем соотношения (10). Для этого разложим произведение Бляшке $B(z)$ в ряд Маклорена

$$B(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_j z^j + \ldots$$

Отсюда вытекает (см. (8))

$$B\left(e^{i\frac{2\pi}{n}} z\right) = a_0 + a_1 e^{i\frac{2\pi}{n}} z + \cdots + a_j \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^j z^j + \ldots$$

При $1 \leq j \leq n - 1$ справедливо $e^{ij\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ и, значит, $a_j = 0$. Так как $a_j = B^{(j)}(0)/j!$, то отсюда и вытекают равенства (10).

Замечание. Нетрудно убедиться в том, что если число j не кратно n, то $B^{(j)}(0) = 0$.

Лемма 2. *Если N — натуральное число, то*

$$d = \sup_{F(z)\in B^1(K)} \left|F^N(0)\right| = N!, \tag{11}$$

а экстремальная функция этой задачи имеет вид

$$F^*(z) = e^{i\delta} z^N, \quad \text{где } \delta \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Доказательство. Так как $F(z) = z^N \in B^1(K)$ и $F^{(N)}(z) = N!$, то $d \geq N!$.

Пусть теперь функция $F(z) \in B^1(K)$. Тогда

$$\left|F^{(N)}(0)\right| = \left|\frac{N!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{N+1}} d\zeta\right| \leq \frac{N!}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} |d\zeta| = N!$$

и, значит, $d \leq N!$ Отсюда и вытекает равенство (11). Согласно предыдущему экстремальная функция задачи (11) единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$ и имеет вид (12).

Теорема 1. *В случае, когда $1 \leq N \leq n-1$, погрешность наилучшего метода приближения значений $f^{(N)}(0)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$ вычисляется по формуле*

$$r_N(z_1, \ldots, z_n) = N! R^n. \tag{13}$$

Экстремальная функция $f^*z)$ задачи (2) единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, где $\delta \in \mathbb{R}$, и имеет вид

$$f^*(z) = e^{i\delta} z^N B(z). \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим

$$A = \{f(z) : \, f(z) \in B^1(K), \, f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0\}$$

семейство аналитических функций. Пусть $f(z) \in A$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{f(z)}{/B(z)}.$$

Если $|z| = 1$, то $|g(z)| = |f(z)| \leq 1$. Отсюда следует, что если $f(z) \in A$, то $f(z) = B(z)g(z)$, где $g(z) \in B^1(K)$. Так как согласно (10)

$$f^{(N)}(0) = \sum_{k=0}^{N} C_n^k \, B^{(N-k)}(0) g^{(k)}(0) = C_N^N \, B(0) g^{(N)}(0) = B(0) g^{(N)}(0),$$

то в силу (2), (9), (11)

$$r_n(z_1, \ldots, z_n) = |B(0)| \sup_{g(z)\in B^1(K)} \left|g^{(N)}(0)\right| = N! R^n.$$

Понятно, что экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (2) единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, где $\delta \in \mathbb{R}$ (см. лемму 2) и имеет вид (14). Теорема доказана.

Следствие 1. *Так как* $f^*(z)$ *является экстремальной функцией задачи (2), то* $\left|f^{*(N)}(0)\right| = r_N(z_1, \ldots, z_n)$. *Отсюда следует, что* $f^*(z)$ *является экстремальной функцией задачи*

$$r_N(z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f(z)\in B^1(K)} \left| f^{(N)}(0) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k) \right| = \sup_{f(z)\in B^1(K)} \left| \int_{\Gamma} \omega(\zeta) f(\zeta) d\zeta \right|, \qquad (15)$$

где $\sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ *— любой из линейных наилучших методов приближения, а*

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{N!}{\zeta^{N+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\zeta - z_k} \right). \qquad (16)$$

Значит, экстремальная функция задачи (15) *имеет вид* $e^{i\delta} f^*(z)$, *где* $\delta \in \mathbb{R}$.

Следствие 2. *Мероморфная функция* $R(z) = f^*(z)(\omega(z) - \varphi^*(z))$, *в которой* $f^*(z)$ *является экстремальной функцией задачи (2),* $\omega(z)$ *имеет вид* (16), *а* $\varphi^*(z)$ *— экстремальная функция в правой части равенства* (3) *не равна нулю в замкнутом круге* $\bar{K}$ *(см. (5), (14)) и имеет только одну особую точку в нуле.*

Замечание. Если $\sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ — линейный наилучший метод, а $f^*(z)$ является экстремальной функцией задачи (2), то выполняется соотношение (4), в котором функция $\omega(\zeta)$ имеет вид (16).

2. Определение коэффициентов линейного наилучшего метода приближения

Лемма 3. *Линейный наилучший метод приближения* $\sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ *значений* $f^{(N)}(0)$ *по значениям* $f(z_1), \ldots, f z_n)$ *единственен.*

Доказательство. Предположим, что существует еще один линейный наилучший метод $\sum_{k=1}^{n} \hat{c}_k f(z_k)$. Тогда

$$\sup_{f(z)\in B^1(K)} \left| \int_{\Gamma} \omega_1(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \right| = r_N(z_1, \ldots, z_n),$$

где

$$\omega_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{N!}{\zeta^{N+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{c}_k}{\zeta - z_k} \right). \qquad (17)$$

Экстремальная функция $\varphi_1^*(z)$ такая, что $\varphi_1^*(z) \in H_1$ (см. (3)), и $f^*(z)$ удовлетворяет согласно формуле (4) соотношению

$$f^*(\zeta)[\omega_1(\zeta) - \varphi_1^*(\zeta)]d\zeta = e^{i\delta_1} |\omega_1(\zeta) - \varphi_1^*(\zeta)||d\zeta|, \qquad (18)$$

где δ_1 — вещественная константа. Введем обозначение

$$R_1(z) = f^*(z)[\omega_1(z) - \varphi_1^*(z)].$$

Рассмотрим функцию

$$Q(z) = e^{i\theta}\frac{R_1(z)}{R(z)} = e^{i\theta}\frac{\omega_1(z) - \varphi^*(z)}{\omega(z) - \varphi^*(z)},$$

где $\theta = \delta - \delta_1$ (см. (4), (18)). Так как $R(z) \neq 0$, когда $z \in \bar{K}$, то согласно следствию 2 функция $Q(z)$ имеет особую точку только в нуле. Убедимся в том, что и в нуле она аналитична. В самом деле согласно (16), (17) выполнено

$$Q(0) = \lim_{z\to 0} Q(z) = e^{i\theta}\lim_{z\to 0}\frac{z^{N+1}(\omega_1(z) - \varphi^*(z))}{z^{N+1}(\omega(z) - \varphi^*(z))} = e^{i\theta}.$$

Итак, функция $Q(z)$ аналитична в $\bar{K}$. Кроме того, $Q(z)$ принимает положительные значения на окружности Γ (см. (4), (18)). Тогда $Q(z) = C$ для всех $z \in \bar{K}$, где $C > 0$ — константа. Следовательно, $Q(z) = 1$ и поэтому $\hat{c_1} = c_1$, …, $\hat{c_n} = c_n$. То есть линейный наилучший метод приближения единственен.

Теорема 2. *Коэффициенты линейного наилучшего метода приближения* $\sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ *значений* $f^{(N)}(0)$ *по значениям* $f(z_1)$, …, $f(z_n)$ *в случае, когда* $1 \le N \le n-1$ *находятся по формуле*

$$c_k = N!\,\frac{(1-R^{2n})}{R^N n}\,e^{-iN\frac{2\pi}{n}(k-1)},$$

где $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Так как метод $\sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k)$ является линейным наилучшим методом, то для любой функции $f(z) \in B^1(K)$

$$\left| f^{(N)}(0) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k) \right| \le r_N(z_1, \dots, z_n).$$

Функция $f\left(e^{i\frac{2\pi}{n}} z\right) \in B^1(K)$. Отсюда

$$\left| e^{iN\frac{2\pi}{n}} f^{(N)}(0) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k) \right| \le r_N(z_1, \dots, z_n).$$

Значит, для любой функции $f(z) \in B^1(K)$ выполняется неравенство

$$\left| f^{(N)}(0) - \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{-iN\frac{2\pi}{n}}\, f(e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k) \right| \le r_N(z_1, \dots, z_n).$$

Так как линейный наилучший метод приближения единственен, то коэффициенты c_k удовлетворяют следующему соотношению

$$c_k = c_1 e^{-iN\frac{2\pi}{n}(k-1)}, \qquad \text{при всех } k = 1, \dots, n. \tag{19}$$

После этого рассмотрим следующий интеграл

$$J = \frac{N!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{B(0)}{z^{N+1}B(z)}\, f(z)\, dz,$$

где $f(z) \in B^1(K)$. Оценим модуль интеграла (см. (9))

$$|J| \leq \frac{N!}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |B(0)||f(z)||dz| \leq \frac{N!R^n}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} |dz| \leq N!R^n. \tag{20}$$

Теперь вычислим интеграл J. Введем обозначие

$$\Phi(z) = \frac{B(0)}{z^{N+1}B(z)}.$$

Разложим функцию $\Phi(z)$ в ряд Лорана в некоторой окрестности U с центром в точке ноль

$$\Phi(z) = \frac{C_{-(N+1)}}{z^{N+1}} + \frac{C_{-N}}{z^N} + \frac{C_{-(N-1)}}{z^{N-1}} + \cdots + \frac{C_{-1}}{z} + V(z), \tag{21}$$

где $V(z)$ аналитическая функция в окрестности U.

Найдем коэффициенты $C_{-(N+1)}, \ldots, C_{-1}$. Так как

$$\frac{B(0)}{B(z)} = C_{-(N+1)} + C_{-N}z + C_{-(N-1)}z^2 + \cdots + c_{-1}z^N + \ldots,$$

то

$$C_{-(N+1)} = \lim_{z \to 0} \frac{B(0)}{B(z)} = 1.$$

Понятно, что согласно (10)

$$C_{-N} = \lim_{z \to 0} B(0) \left((B(z))^{-1}\right)' = -B(0) \lim_{z \to 0} \frac{B'(z)}{B^2(z)} = 0.$$

Аналогично доказывается, что $C_{-(N-1)} = \cdots = C_{-1} = 0$. Отсюда и из (21) вытекает

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^{N+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{z - z_k} + \psi(z),$$

где $\psi(z)$ аналитическая в $\bar{K}$ функция, а

$$a_k = -\operatorname*{res}_{z=z_k} \Phi(z), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Следовательно,

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{N!}{\zeta^{N+1}} - N! \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\zeta - z_k} \right) f(\zeta)\, d\zeta = f^{(N)}(0) - N! \sum_{k=1}^{n} a_k f(z_k).$$

Итак, в силу (13), (20)

$$\left| f^{(N)}(0) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(z_k) \right| \leq r_N(z_1, \ldots, z_n)$$

при всех $f(z) \in B^1(K)$, где $c_k = N!a_k$, $k = 1, \ldots, n$. Значит, c_k — коэффициенты линейного наилучшего метода. Найдем коэффициент c_1. В силу (6), (7), (22) имеем

$$c_1 = -N!B(0) \operatorname*{res}_{z=R} \frac{1}{z^{N+1}B(z)} = -N!B(0) \lim_{z \to R} \frac{(z-R)(1-Rz)\prod_{k=2}^{n}(1-\bar{z}_k z)}{z^{N+1}(z-R)\prod_{k=2}^{n}(z-z_k)} =$$

$$= -N!B(0)\frac{(1-R^2)\prod_{k=2}^{n}(1-\bar{z}_k R)}{R^{N+1}\prod_{k=2}^{n}(R-z_k)} = -N!(-R^n)\frac{1-R^{2n}}{R^{N+1}R^{n-1}n} = N!\frac{1-R^{2n}}{R^N n}.$$

Отсюда (см. (19)) и вытекает справедливость теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян, Р. Р. Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям / Р. Р. Акопян // Математические заметки. — 2016. — Т. 99, вып. 2. — С. 163–170. — DOI: 10.4213/mzm10741.

2. Магарил-Ильяев, Г. Г. О наилучших методах восстановления производных на Соболевских классах / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Изв. РАН. Сер. Матем. — 2014. — Т. 78, вып. 6. — С. 83–102. — DOI: 10.4213/im8182.

3. Овчинцев, М. П. Вычисление коэффициентов линейного наилучшего метода восстановления ограниченных аналитических функций в круге / М. П. Овчинцев, Е. М. Гусакова // Вестник МГСУ. — 2014. — Т. 4, вып. 6. — С. 44–51.

4. Осипенко, К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек / К. Ю. Осипенко // Математические заметки. — 1976. — Т. 19, № 1. — С. 29–40.

5. Осипенко, К. Ю. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана / К. Ю. Осипенко, М. И. Стесин // Математические заметки. — 1991. — Т. 49, вып. 4. — С. 95–104. — DOI: 10.1007%2FBF01158217.

6. Хавинсон, С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различные обобщения / С. Я. Хавинсон. — М. : Изд-во МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1981. — 92 с.

7. Micchelli, C. Lectures on optimal recovery / C. Micchelli, T. Rivlin // Lect. Notes. — 1982. — Vol. 9. — P. 21–93.

8. Rogosinski, W. W. On certain extremum problems for analytic functions / W. W. Rogosinski, H. Schapiro // Acta Math. — 1954. — Vol. 90. — P. 287–318. — DOI: 10.1007/BF02392438.

REFERENCES

1. Akopyan R.R. Optimalnoe vosstanovlenie analiticheskoy funktsii po zadannym s pogreshnostyu granichnym znacheniyam [Optimal Recovery of Analytic Functions From Boundary Conditions Specified with Error]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 2016, vol. 99, iss. 2, pp. 163-170. DOI: 10.4213/mzm10741.

2. Magaril-Ilyaev G.G., Osipenko K.Yu. O nailuchshikh metodakh vosstanovleniya proizvodnykh na Sobolevskikh klassakh [On the Best Methods for Recovering Derivatives in Sobolev Classes]. *Izv. RAN. Ser. Matem.* [Izvestiya: Mathematics], 2014, vol. 78, iss. 6, pp. 83-102. DOI: 10.4213/im8182.

3. Ovchintsev M.P., Gusakova E.M. Vychislenie koeffitsientov lineynogo nailuchshego metoda vosstanovleniya ogranichennykh analiticheskikh funktsiy v kruge [The Calculation of Coefficients of the Linear Best Method for Reconstruction of Bounded Analytic Functions in a Circle]. *Vestnik MGSU*, 2014, vol. 4, iss. 6, pp. 44-51.

4. Osipenko K.Yu. Nailuchshee priblizhenie analiticheskikh funktsiy po informatsii ob ikh znacheniyakh v konechnom chisle tochek [The Best Approximation of Analytic Functions by Information on Their Values a Finite Number of Points]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1976, vol. 19, no. 1, pp. 29-40.

5. Osipenko K.Yu., Stesin M.I. O zadachakh vosstanovleniya v prostranstvakh Khardi i Bergmana [Recovery Problems in Hardy and Bergman Spaces]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes], 1991, vol. 49, iss. 4, pp. 95-104. DOI: 10.1007%2FBF01158217.

6. Khavinson S.Ya. *Osnovy teorii ekstremalnykh zadach dlya ogranichennykh analiticheskikh funktsiy i ikh razlichnye obobshcheniya* [Fundamentals of the Theory of Extreme Problems for Bounded Analytical Functions and Their Various Generalizations]. Moscow, Izd-vo MISI im. V.V. Kuybysheva Publ., 1981. 92 p.

7. Micchelli C., Rivlin T. Lectures on Optimal Recovery. *Lect. Notes*, 1982, vol. 9, pp. 21-93.

8. Rogosinski W.W., Schapiro H. On Certain Extremum Problems for Analytic Functions. *Acta Math*, 1954, vol. 90, pp. 287-318. DOI: 10.1007/BF02392438.

ABOUT THE OPTIMAL RECOVERY OF DERIVATIVES OF ANALYTIC FUNCTIONS FROM THEIR VALUES AT POINTS THAT FORM A REGULAR POLYGON

Mikhail P. Ovchintsev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Applied Mathematics,
Moscow State University of Civil Engineering
6714543@rambler.ru
Yaroslavskoe Shosse, 26, 129337 Moscow, Russian Federation

Abstract. In this paper, the author solves the problem of optimal recovery of derivatives of bounded analytic functions defined at zero of the unit circle. Recovery is performed based on information about the values of these functions at points $z_1, \ldots, z_n$, that form a regular polygon. The article consists of an introduction and two sections. The introduction discusses the necessary concepts and results from the works of K.Yu. Osipenko and S.Ya. Khavinson, that form the basis for the solution of the problem. In the first section, the author proves some properties of the Blaschke product with zeros at points $z_1, \ldots, z_n$. After this, the error of the best approximation method of derivatives $f^{(N)}(0)$, $1 \leq N \leq n-1$, by values $f(z_1), \ldots, f(z_n)$ is calculated. In the same section the author gives the corresponding extremal function. In the second section, the uniqueness of the linear best approximation method is established, and then its coefficients are calculated. At the end of the article, the formulas found for calculating the coefficients are substantially simplified.

Key words: optimal recovery, best approximation method, error of the best method, extremal function, linear best method, coefficients of the linear best method.