УДК 517.956
ББК 22.161.6

N-РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

И.А. Романова

Работа посвящена исследованию решений уравнения минимальных поверхностей, полученных методом, разработанным в [3].

Ключевые слова: *квазилинейные уравнения, уравнение минимальных поверхностей, проблема Бернштейна, целые решения, минимальные поверхности.*

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$L_{\gamma,\varepsilon}[u] = u_{xx}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_x^2 + (\gamma-1)u_y^2\right) + 4u_{xy}\,u_x u_y + \\ + u_{yy}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_y^2 + (\gamma-1)\,u_x^2\right) = 0, \quad (1)$$

где $|\gamma| \geq 1$, $\varepsilon = 0, 1$ или -1. Это уравнение обобщает многие известные уравнения геометрии и теории потенциала.

Для уравнения (1) в работе [3] была исследована проблема существования целых решений для случая $|\gamma| > 1$. Для одного предельного случая $\gamma = 1$, $\varepsilon = 1$, соответствующего уравнению Саймона

$$L_{1,1}[u] = (1 + u_x^2)\,u_{xx} + 2u_x u_y\,u_{xy} + (1 + u_y^2)\,u_{yy} = 0,$$

проблема Бернштейна была рассмотрена в [4]. Другой предельный случай $\gamma = -1$, $\varepsilon = -1$ соответствует уравнению минимальных поверхностей

$$L_{-1,-1}[u] = (1 + u_y^2)\,u_{xx} - 2u_x u_y\,u_{xy} + (1 + u_x^2)\,u_{yy} = 0. \quad (2)$$

Хорошо известно (см. [2]), что целыми решениями уравнения минимальных поверхностей являются только линейные функции. Для уравнений (1) и уравнения Саймона свойство Бернштейна не выполняется, поскольку существуют счетные семейства нетривиальных решений, заданных в виде явной параметризации в терминах гипергеометрических функций [3; 4].

Тем не менее метод построения этих решений может быть применен для исследования уравнения минимальных поверхностей. В данной работе приводятся результаты этого исследования.

1. Замечания о методе построения решений

Опишем кратко суть метода построения решений уравнения (1).

С помощью преобразования Лежандра [5, с. 43]

$$\xi = u_x(x,y),\ \eta = u_y(x,y), \quad v(\xi,\eta) = x\xi + y\eta - u(x,y)$$

преобразуем квазилинейное уравнение (1) в линейное

$$v_{\xi\xi}\left[2\varepsilon + (\gamma+1)\eta^2 + (\gamma-1)\xi^2\right] - 4\xi\eta v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\left[2\varepsilon + (\gamma+1)\xi^2 + (\gamma-1)\eta^2\right] = 0.$$

Будем искать решение последнего в виде функций с разделенными полярными переменными

$$\xi = \rho\cos\tau, \eta = \rho\sin\tau, \quad v = f(\rho)\cos(k\tau).$$

Непосредственными вычислениями можно установить, что

$$v(\rho,\theta) = \rho^k\, F(a,b;c;-\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2)\,\cos N\theta,$$

где $\theta = \tau/(N-1)$, $k = N/(N-1)$, а

$$F(a,\, b;\, c;\, -\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2) = {}_2F_1(a,\, b;\, c;\, -\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2) -$$

гипергеометрическая функция с параметрами, заданными равенствами

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\left(k + \tfrac{1}{\gamma-1} - \tfrac{1}{|\gamma-1|}\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}\right), \\ b &= \tfrac{1}{2}\left(k + \tfrac{1}{\gamma-1} + \tfrac{1}{|\gamma-1|}\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}\right), \\ c &= k+1. \end{aligned}$$

Напомним, что гипергеометрическая функция $F(a,b;c;t)$ является решением уравнения

$$t(1-t)\,F'' + [c-(a+b+1)\,t]\,F' - ab\,F = 0$$

и при $c \neq -1,-2,\ldots$ представима в виде ряда

$$F(a,b;c;t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{t^k}{k!}, \tag{3}$$

где

$$(a)_k = a\cdot(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \qquad (a)_0 = 1.$$

Таким образом, поскольку преобразование Лежандра является инволюцией, решение квазилинейного уравнения (1) будет определяться параметризацией

$$x = v_\xi(\xi,\eta), \quad y = v_\eta(\xi,\eta), \quad u = x\xi + y\eta - v(\xi,\eta).$$

И будет справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $|\gamma| > 1$, $N \geq 2$ — произвольное натуральное число, $k = \frac{N}{N-1}$ и $f(\rho) = \rho^k F(a,b;c;-\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2)$, где $F(a,b;c;t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса с параметрами*

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\left(k + \tfrac{1}{\gamma-1} - \tfrac{1}{|\gamma-1|}\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}\right), \\ b &= \tfrac{1}{2}\left(k + \tfrac{1}{\gamma-1} + \tfrac{1}{|\gamma-1|}\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}\right), \\ c &= k+1. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда параметрическое представление

$$\begin{array}{rcl} x & = & A(\rho)\cos(2N-1)\theta + B(\rho)\cos\theta, \\ y & = & A(\rho)\sin(2N-1)\theta - B(\rho)\sin\theta, \\ u_N & = & M(\rho)\cos N\theta \end{array} \tag{5}$$

задает непрерывную функцию $u_N(x,y)$, являющуюся решением уравнения (1). Здесь

$$\begin{array}{rcl} A(\rho) & = & \frac{1}{2}\left(f'(\rho) - \frac{k}{\rho}f(\rho)\right), \\ B(\rho) & = & \frac{1}{2}\left(f'(\rho) + \frac{k}{\rho}f(\rho)\right), \\ M(\rho) & = & \rho f'(\rho) - f(\rho). \end{array} \tag{6}$$

Решения вида (5) будем называть N*-решениями.*

Отметим, что из метода построения не следует, что полученные решения являются целыми или даже, что они определяют функциональную зависимость $u_N(x,y)$. Доказательство этих фактов требует более тонкого анализа и базируется на исследовании свойств гипергеометрических функций и их комбинаций специального вида. В частности, принципиальную роль играет доказательство того факта, что градиентное отображение

$$W = (x,y) = \nabla_{\xi\eta} v(\xi,\eta) \tag{7}$$

является гомеоморфизмом плоскости на себя.

2. N-решения уравнения минимальных поверхностей

Чтобы получить параметрическое представление N-решений уравнения минимальных поверхностей, можно проделать все действия предыдущего параграфа применительно к (2). С другой стороны, можно воспользоваться полученной параметризацией (4)–(6). Используя и тот, и другой подход, мы получим одинаковый результат, что означает непрерывность решений по параметру γ в предельных точках $\gamma = -1$ и $\gamma = 1$. Отметим, что непрерывность в $\gamma = 1$ установлена в [3].

Таким образом, можно сформулировать теорему.

Теорема 2. *Пусть $N \geq 2$ — произвольное натуральное число, $k = \frac{N}{N-1}$ и*

$$f(\rho) = \rho^k F(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}, \frac{k}{2}; k+1; -\rho^2),$$

где $F(a,b;c;t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Тогда параметрическое представление

$$\begin{array}{rcl} x & = & A(\rho)\cos(2N-1)\theta + B(\rho)\cos\theta, \\ y & = & A(\rho)\sin(2N-1)\theta - B(\rho)\sin\theta, \\ u_N & = & M(\rho)\cos N\theta, \end{array}$$

задает непрерывную функцию $u_N(x,y)$, являющуюся решением уравнения (1). Здесь

$$\begin{array}{rcl} A(\rho) & = & \frac{1}{2}\left(f'(\rho) - \frac{k}{\rho}f(\rho)\right), \\ B(\rho) & = & \frac{1}{2}\left(f'(\rho) + \frac{k}{\rho}f(\rho)\right), \\ M(\rho) & = & \rho f'(\rho) - f(\rho). \end{array}$$

Отметим одну особенность полученной параметризации. В случае, когда пара первых параметров гипергеометрической функции отличается на $\frac{1}{2}$, определено квадратичное преобразование Гаусса (см. [1, с. 77]), а именно:

$$F(a, a+\frac{1}{2}; c; z) = 2^{2a}\left[1+\sqrt{1-z}\right]^{-2a} F\left(2a, 2a-c+1; c; \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}\right).$$

Таким образом, после надлежащих преобразований, имеем

$$F(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}, \frac{k}{2}; k+1; -\rho^2) = \frac{2^{k-1}}{(1+\sqrt{1+\rho^2})^{k-1}}\cdot F(k-1, -1; k+1; \frac{1-\sqrt{1+\rho^2}}{1+\sqrt{1+\rho^2}}).$$

Поскольку, в силу (3),

$$F(a, -1; c; t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)_n\,(a)_n}{(c)_n}\frac{t^n}{n!} = 1-\frac{a}{c}\,t,$$

то

$$F(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}, \frac{k}{2}; k+1; -\rho^2) = \frac{2^{k-1}}{(1+\sqrt{1+\rho^2})^{k-1}}\cdot\left(1-\frac{(k-1)}{(k+1)}\cdot\frac{1-\sqrt{1+\rho^2}}{1+\sqrt{1+\rho^2}}\right).$$

Используя полученное параметрическое представление N-решений уравнения минимальных поверхностей, можно получить большинство результатов [3]. Перечислим те, которые потребуются нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $|\gamma| > 1$, $k = N/(N-1)$ и N — натуральное число, $N \geq 2$. Пусть также параметры a, b и c удовлетворяют (4), а $A(\rho)$ и $B(\rho)$ определены равенствами (6). Тогда*

(i) функция $B(\rho)$ положительна при всех $\rho > 0$, а $A(\rho)$ сохраняет знак, причем $\mathrm{sgn} A(\rho) = \mathrm{sgn}\gamma$;

(ii) справедливы неравенства $B \geq |A| \geq 0, \quad B' \geq |A'| \geq 0$.

Учитывая изложенное выше, оценим $|W|$. Из (7) и параметризации решения получим

$$|W|^2 = x^2 + y^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos 2N\theta.$$

В силу пункта (i) леммы 1 справедливо $A < 0$ и $B > 0$ для $\rho > 0$, а значит,

$$(A+B)^2 \leq |W|^2 \leq (B-A)^2,$$

где

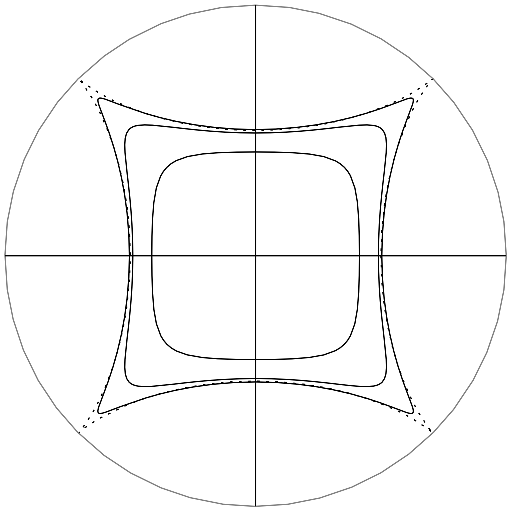
$$B - A = \frac{k}{\rho}\,f(\rho) = k\cdot 2^k\frac{k\sqrt{1+\rho^2}+1}{(k+1)(1+\sqrt{1+\rho^2})}\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho}+\sqrt{1+\frac{1}{\rho^2}}\right)^{k-1}}.$$

Из последнего представления, в силу возрастания функции $B-A$, следует, что

$$|W| = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \frac{k^2}{k+1}\cdot 2^k.$$

Таким образом, минимальная поверхность, имеющая структуру N-решений, будет являться C^2-гладким графиком, заключенным в цилиндр радиуса $\frac{k^2}{k+1}\cdot 2^k$.

В качестве примера на рисунке на плоскости переменных x, y изображены прообразы кривых вида $\rho = \mathrm{const}$ и проекция цилиндра радиуса $16/3$ для $N = 2$.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1965. — 296 с.
2. Бернштейн, С. Н. Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа / С. Н. Бернштейн // УМН. — 1941. — № 8. — С. 75–81.
3. Зорина, И. А. О целых решениях квазилинейных уравнений с квадратичной главной частью / И. А. Зорина, В. Г. Ткачев // Вестник СамГУ. Серия «Математика». — 2008. — № 3. — С. 108–123.
4. Зорина, И. А. Целые решения уравнения Саймона / И. А. Зорина, В. Г. Ткачев // Геометрический анализ и его приложения : труды международной школы-конференции, г. Волгоград, 24–30 мая 2004 г. — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. — С.55–74.
5. Курант, Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. — М. : ОГИЗ, 1945. — Т. 1. — 538 с.

N-SOLUTIONS OF MINIMAL SURFACE EQUATION

I.A. Romanova

In current paper we apply the method of [3] to research a structure properties of MSE-solutions.

Key words: *quasilinear differential equation, minimal surface equation, Bernstain problem, entire solution, minimal surface.*