



DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.1.1>

УДК 531  
ББК 22.251

Дата поступления статьи: 24.10.2019

Дата принятия статьи: 21.01.2020

## НЕПРЕРЫВНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ И ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ<sup>1</sup>

**Наталья Анатольевна Гуреева**

Доктор физико-математических наук,  
доцент департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий,  
Финансовый университет при Правительстве РФ  
[natalya-gureeva@yandex.ru](mailto:natalya-gureeva@yandex.ru)  
просп. Ленинградский, 49, 125993 ГСП-3 г. Москва, Российская Федерация

**Юрий Васильевич Клочков**

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики,  
Волгоградский государственный аграрный университет  
[klotchkov@bk.ru](mailto:klotchkov@bk.ru)  
просп. Университетский, 29, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

**Анатолий Петрович Николаев**

Доктор технических наук,  
профессор кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования,  
Волгоградский государственный аграрный университет  
[apetr40@yandex.ru](mailto:apetr40@yandex.ru)  
просп. Университетский, 29, 400002 г. Волгоград, Российская Федерация

**Михаил Юрьевич Клочков**

Студент кафедры математического моделирования и информатики,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
[m.klo4koff@yandex.ru](mailto:m.klo4koff@yandex.ru)  
Ленинские горы, 1, 119991 ГСП-1 г. Москва, Российская Федерация

**Аннотация.** При определении напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов инженерных конструкций с эллипсоидальной поверхностью требуется знание геометрических параметров в виде векторов локальных базисов и их производных по криволинейным координатам эллипсоидальной поверхности. При каноническом представлении эллипсоидальной поверхности в декартовой системе координат имеют место неопределенности указанных геометрических параметров на кривых пересечения эллипсоида с горизонтальной координатной плоскостью. Для исключения указанных неопределенностей предлагается использовать представление эллипсоидальной поверхности в виде радиус-вектора, компоненты которого представляют собой произведение двух параметрических функций. Аргументом первой функции является параметр  $T$  эллиптической кривой, полученной в результате пересечения эллипсоидальной поверхности с координатной плоскостью  $Z$ . Аргументом другой функции является параметр  $t$  кривой эллипса, полученного от пересечения эллипсоида с плоскостью, перпендикулярной оси  $OX$ , на расстоянии  $x$  от начала координат. В результате дифференцирования введенного радиус-вектора по криволинейным координатам были получены искомые геометрические величины, необходимые для выполнения прочностных и других видов расчетов инженерных систем и объектов, имеющих эллипсоидальную отсчетную поверхность.

**Ключевые слова:** оболочка, эллипсоид, параметризация, базисные векторы, эллипсоидальная оболочка.

### Введение

При реализации численных методов [1; 4; 8; 9; 11] определения напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечных конструкций различных конфигураций необходимо располагать аналитическими уравнениями срединной поверхности и ее геометрических параметров, определяющих квадратичные формы поверхности [2; 10]. Определение срединной поверхности эллипсоидальной оболочки параметрами декартовой системы координат  $OXYZ$  приводит к неопределенности значительного количества точек поверхности на линии пересечения срединной поверхности плоскостью  $OXZ$ . При определении НДС оболочек используются криволинейные системы координат с базисными векторами, меняющимися от точки к точке, компонентами в которых определяются векторы перемещений произвольных точек оболочки, производные от которых являются основой для нахождения компонент тензоров деформаций в рассматриваемых точках. В работе получены неортогональные базисные векторы и их производные в этом же базисе для произвольной точки оболочки, расположенной на расстоянии  $\zeta$  от соответствующей точки срединной поверхности. Срединная поверхность представлена радиус-вектором, компоненты которого являются функциями параметров эллиптических кривых, полученных от пересечения поверхности плоскостью  $OXZ$  и плоскостями, перпендикулярными оси  $OX$ . Приведена параметризация срединной поверхности эллипсоидальной оболочки с неопределенностью, возникающей только в одной точке. Определены базисные векторы произвольной точки эллипсоидальной оболочки и получены производные этих векторов в базисе рассматриваемой точки. Эти величины необходимы для использования в

прочностных расчетах тонкостенных элементов инженерных сооружений [3; 5–7; 12].

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1)$$

где  $a, b, c$  — отрезки, отсекаемые на осях  $Ox, Oy, Oz$ .

Координата  $z$  срединной поверхности определяется выражением

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (2)$$

из которого видно, что производные координаты  $z$  будут иметь области неопределенности.

При представлении срединной поверхности эллипсоидальной оболочки в декартовой системе координат с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , векторным уравнением [5; 6]

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (3)$$

производные радиуса-вектора также будут иметь области неопределенности, поэтому необходимо представлять радиус-вектор поверхности в параметрической форме.

На рисунке 1 представлена срединная поверхность эллипсоида в декартовой системе координат. Эллиптическая кривая в вертикальном сечении  $xOz$  (рис. 1) может быть записана в параметрическом виде

$$x = a \cdot \sin T, \quad z = c \cdot \cos T, \quad (4)$$

где  $T$  — параметр, изменяющийся в пределах  $0 \leq T \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 2).

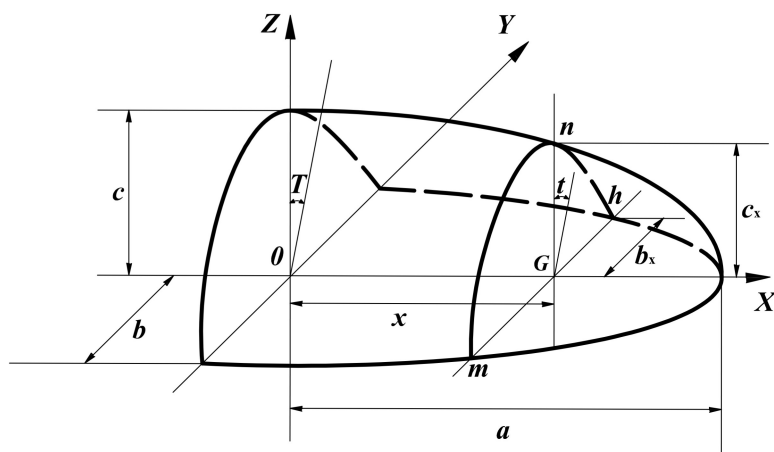


Рис. 1

Координаты эллиптической кривой в сечении эллипсоида плоскостью  $xOy$  (рис. 1) определяются параметрическими выражениями

$$x = a \cdot \sin T, \quad y = b \cdot \cos T. \quad (5)$$

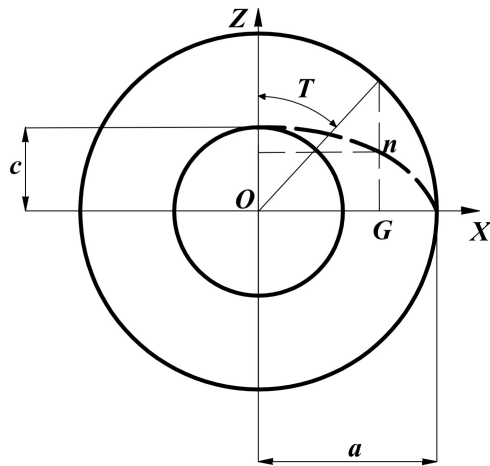


Рис. 2

В сечении срединной поверхности эллипсоида  $mnh$ , отстоящем на расстоянии  $x$  от начала координат (рис. 1), с координатами вершин эллипсоидального сечения, определяется на основе (4)–(5) выражениями  $b_x = b \cdot \cos T$ ,  $c_x = c \cdot \cos T$ , эллиптическую кривую между точками  $K$  и  $H$  можно записать в параметрическом виде:

$$y = b_x \sin t, \quad z = c_x \cos t, \tag{6}$$

где параметр  $t$  изменяется в пределах  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  (рис 3).

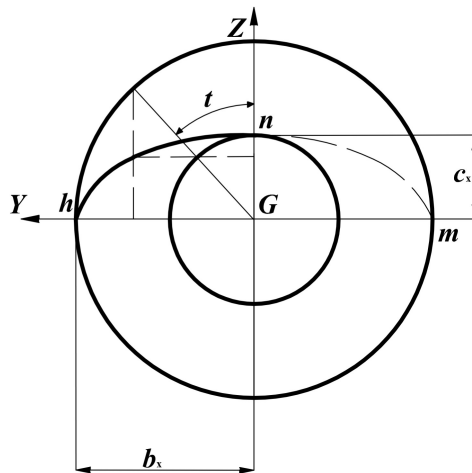


Рис. 3

Используя соотношения (4), (5) и (6), радиус-вектор произвольной точки  $M$  срединной поверхности эллипсоида можно записать выражением

$$\vec{R} = a \cdot \sin T \vec{i} + b \cdot \cos T \sin t \vec{j} + c \cdot \cos T \cos t \vec{k}. \tag{7}$$

Векторы, касательные к срединной поверхности эллипсоида в точке  $M$ , определяются дифференцированием (7)

$$\vec{a}_1 = \vec{R}_{,T} = a \cdot \cos T \vec{i} - b \cdot \sin T \sin t \vec{j} - c \cdot \sin T \cos t \vec{k};$$

$$\vec{a}_2 = \vec{R}_{,t} = b \cdot \cos T \cos t \vec{j} - c \cdot \cos T \sin t \vec{k}. \quad (8)$$

Нормаль к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \vec{i} \frac{u_1}{\sqrt{u}} + \vec{j} \frac{u_2}{\sqrt{u}} + \vec{k} \frac{u_3}{\sqrt{u}}, \quad (9)$$

где  $u_1 = bc \cdot \sin T \cdot \cos T$ ;  $u_2 = ac \cdot \sin t \cdot \cos^2 T$ ;  $u_3 = ab \cdot \cos t \cdot \cos^2 T$ ;  $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ .

### 1. Геометрические параметры произвольной точки эллипсоидальной оболочки

Положение произвольной точки эллипсоидальной оболочки, отстоящей на расстоянии  $\xi$  от срединной поверхности, определяется радиусом-вектором

$$\vec{R}^\xi = \vec{R} + \xi \vec{a}_3. \quad (10)$$

Векторы локального базиса произвольной точки определяются дифференцированием (10)

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \vec{R}_{,T}^\xi = \vec{R}_{,T} + \xi \vec{a}_{3,T} = \vec{a}_1 + \xi \vec{a}_{3,T}; \\ \vec{g}_2 &= \vec{R}_{,t}^\xi = \vec{R}_{,t} + \xi \vec{a}_{3,t} = \vec{a}_2 + \xi \vec{a}_{3,t}; \\ \vec{g}_3 &= \vec{R}_{,\xi}^\xi = \vec{a}_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя (8), (9), соотношения (11) можно представить в матричном виде

$$\left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1} = [\tau(T, t, \xi)] \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [\tau]^{-1} \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1}, \quad (12)$$

где  $\left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1}^T = \{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \}$ ;  $\left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1}^T = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$ .

Производные базисных векторов произвольной точки можно представить компонентами в этом же базисе

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{g}_{,T} \right\}_{3 \times 1} &= [\tau_{,T}] \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [\tau_{,T}] [\tau]^{-1} \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1} = [M] \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \vec{g}_{,t} \right\}_{3 \times 1} &= [\tau_{,t}] \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [\tau_{,t}] [\tau]^{-1} \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1} = [N] \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1}; \\ \left\{ \vec{g}_{,\xi} \right\}_{3 \times 1} &= [\tau_{,\xi}] \left\{ \vec{i} \right\}_{3 \times 1} = [\tau_{,\xi}] [\tau]^{-1} \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1} = [L] \left\{ \vec{g} \right\}_{3 \times 1}; \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\left\{ \vec{g}_{,T} \right\}_{3 \times 1}^T = \{ \vec{g}_{1,T}, \vec{g}_{2,T}, \vec{g}_{3,T} \}$ ;  $\left\{ \vec{g}_{,t} \right\}_{3 \times 1}^T = \{ \vec{g}_{1,t}, \vec{g}_{2,t}, \vec{g}_{3,t} \}$ ;  $\left\{ \vec{g}_{,\xi} \right\}_{3 \times 1}^T = \{ \vec{g}_{1,\xi}, \vec{g}_{2,T\xi}, \vec{g}_{3,\xi} \}$ ;  $[\tau_{,T}]$ ,  $[\tau_{,t}]$ ,  $[\tau_{,\xi}]$  — матрицы, элементы которых являются производными элементов матрицы  $[\tau]_{3 \times 3}$  по параметрам  $T$ ,  $t$ ,  $\xi$  соответственно.

Как видно из соотношений (7), (8) и (11), неопределенность в значениях геометрических параметров эллипсоидальной оболочки имеет место в точке, определяемой

параметром  $T = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, при определении напряженно-деформированного состояния эллипсоидальной оболочки следует исключать часть оболочки в окрестности этой точки.

### **ПРИМЕЧАНИЕ**

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-41-340004 р\_а.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Батэ, К.-Ю. Методы конечных элементов / К.-Ю. Батэ. — М. : Физматлит, 2010. — 1022 с.
2. Борисенко, А. И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. — М. : Высшая школа, 1966. — 252 с.
3. Галимов, К. З. Теория оболочек сложной геометрии / К. З. Галимов, В. Н. Паймушин. — Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 1985. — 164 с.
4. Голованов, А. И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. — М. : Физматлит, 2006. — 392 с.
5. Григолюк, Э. И. Проблемы нелинейного деформирования. Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. — М. : Наука, 1988. — 232 с.
6. Демидов, С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. — М. : Высшая школа, 1979. — 432 с.
7. Кривошапко, С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей / С. Н. Кривошапко, В. Н. Иванов. — М. : Книжный дом Либроком, 2010. — 560 с.
8. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. — М. : Мир, 1976. — 464 с.
9. Петров, В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В. В. Петров. — М. : Инфра-Инженерия, 2014. — 480 с.
10. Погорелов, А. В. Дифференциальная геометрия / А. В. Погорелов. — М. : Наука, 1974. — 176 с.
11. Шешенин, С. В. Модель эффективного слоя для резинокорродного материала / С. В. Шешенин, С. Г. Бахметьев // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика, механика. — 2014. — № 5. — С. 41–45.
12. Якупов, Н. М. Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии / Н. М. Якупов, М. Н. Серазутдинов. — Казань : ИМНРАН, 1993. — 206 с.

### **REFERENCES**

1. Bate K.-Yu. *Metody konechnykh elementov* [Finite Element Methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 1022 p.
2. Borisenko A.I., Tarapov I.E. *Vektornyy analiz i nachala tenzornogo ischisleniya* [Vector Analysis and the Beginning of Tensor Calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 252 p.
3. Galimov K.Z., Paymushin V.N. *Teoriya obolochek slozhnoy geometrii* [Theory of Shells of Complex Geometry]. Kazan, Izd-vo Kazanskogo gosudarstvennogo universiiteta, 1985. 164 p.
4. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabudinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 392 p.

5. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineynogo deformirovaniya. Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineynykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Problems of Nonlinear Deformation. Method of Continuation of the Solution by Parameter in Nonlinear Problems of Mechanics of a Solid Deformable Body]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 232 p.
6. Demidov S.P. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 432 p.
7. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey* [Encyclopedia of Analytical Surfaces]. Moscow, Knizhnyy dom Librokom, 2010. 560 p.
8. Oden Dzh. *Konechnye elementy v nelineynoy mekhanike sploshnykh sred* [Finite Elements in Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1976. 464 p.
9. Petrov V.V. *Nelineynaya inkrementalnaya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear Incremental Construction Mechanics]. Moscow, Infra-Inzheneriya Publ., 2014. 480 p.
10. Pogorelov A.V. *Differentsial'naya geometriya* [Differential Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 176 p.
11. Sheshenin S.V., Bakhmetyev S.G. Model effektivnogo sloya dlya rezinokorodnogo materiala [Effective Layer Model for Rubber Cord Material]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1, Matematika, mekhanika*, 2014, no. 5, pp. 41-45.
12. Yakupov N.M., Serazutdinov M.N. *Raschet uprugikh tonkostennykh konstruktsiy slozhnoy geometrii* [Calculation of Elastic Thin-Walled Structures of Complex Geometry]. Kazan, IMNRAN, 1993. 206 p.

**CONTINUOUS PARAMETERIZATION  
OF THE MEDIAN SURFACE OF AN ELLIPSOIDAL SHELL  
AND ITS GEOMETRIC PARAMETERS**

**Natalya A. Gureeva**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,  
Department of Data Analysis, Decision-Making and Financial Technologies,  
Financial University under the Government of the Russian Federation  
natalya-gureeva@yandex.ru  
Prosp. Leningradsky, 49, 125993 GSP-3, Moscow, Russian Federation

**Yuriy V. Klochkov**

Doctor of Engineering Sciences, Professor,  
Head of the Department of Higher Mathematics,  
Volgograd State Agrarian University  
klotchkov@bk.ru  
Prosp. Universitetsky, 29, 400002, Volgograd, Russian Federation

**Anatoliy P. Nikolaev**

Doctor of Engineering Sciences, Professor, Department of Applied Geodesy,  
Environmental Management and Water Use,  
Volgograd State Agrarian University  
anpetr40@yandex.ru  
Prosp. Universitetsky, 29, 400002, Volgograd, Russian Federation

**Mikhail Yu. Klochkov**

Student, Department of Mathematical Modeling and Computer Science,  
Lomonosov Moscow State University  
m.klo4koff@yandex.ru  
Leninskie Gory, 1, 119991 GSP-1, Moscow, Russian Federation

**Abstract.** When analyzing the stress-strain state of thin-walled structural elements that have the shape of an ellipsoid, it becomes necessary to calculate the geometric characteristics of the ellipsoidal surface. When using the canonical ellipsoid equation, regions of uncertainty appear in the Cartesian coordinate system at the intersection points of the ellipsoid surface with the horizontal coordinate plane. To exclude these areas of uncertainty, we propose an expression of the radius vector of an ellipsoidal surface whose projections are functions of two parametric representations in mutually perpendicular planes. One of the planes is the vertical plane  $XOZ$ , and the other plane is the plane perpendicular to the axis  $O$  at the point with the  $x$  coordinate. The parameter  $T$  of the ellipse obtained from the intersection of the ellipsoid with the  $XOZ$  plane was chosen as the argument of the first parametric function. The argument of the second parametric function  $t$  is the parameter of an ellipse formed as a result of the intersection of an ellipsoidal surface with a plane perpendicular to the abscissa axis at a distance of  $x$  from the origin. The proposed representation of the ellipsoidal surface allowed us to exclude uncertainties at the intersection points of the ellipsoid with the  $HOWE$  coordinate plane. By differentiating the proposed radius-vector expression at an arbitrary point on an ellipsoidal surface, we obtain relations for the basis vectors of an arbitrary point and their derivatives represented by components in the same local basis. These relations are necessary for the development of algorithms for numerical analysis of deformation processes of engineering structures that have ellipsoidal surfaces.

**Key words:** shell, ellipsoid, parameterization, basis vectors, ellipsoidal shell.