УДК 519.9
ББК 22.162

ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ КВАЗИЭНДОМОРФИЗМОВ, ЗАДАВАЕМЫХ НИГДЕ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

В.Г. Шарапов

В статье изучается построение инвариантной меры для одного класса квазиэндоморфизмов, задаваемых непрерывными нигде не дифференцируемыми отображениями. При этом рассматриваются случаи точных, эргодических неточных и неэргодических квазиэндоморфизмов.

Ключевые слова: *инвариантные меры, непрерывные нигде не дифференцируемые функции, точные и эргодические квазиэндоморфизмы, точные преобразования, эргодичность, квазиэндоморфизмы.*

Пусть (M, F, μ) — пространство Лебега, то есть пространство, изоморфное отрезку $[0,\, 1)$ с мерой Лебега. Пусть T — измеримое сюръективное отображение: $T : M \to M$, несингулярное, то есть $\forall A \in F, \quad \mu(A) = 0$, выполняется $\mu(T^{-1}A) = 0$, и не сохраняет меру, то есть не выполняется равенство $\mu(T^{-1}A) = \mu(A) \quad \forall A \in F$. Если это отображение не взаимнооднозначное, то T называется квазиэндоморфизмом.

Точным квазиэндоморфизмом пространства (M, F, μ) называется квазиэндоморфизм T, для которого $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T^{-n}F = R$, где R — тривиальная σ-алгебра, состоящая из множеств меры 0 и 1. Эквивалентное определение: квазиэндоморфизм T точный, если для каждого измеримого множества A положительной меры $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(T^nA) = 1$.

Эргодическим квазиэндоморфизмом пространства (M, F, μ) называется квазиэндоморфизм T, для которого равенство $T^{-1}A = A$ возможно только при $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$. Если равенство $T^{-1}A = A$ возможно при $0 < \mu(A) < 1$, то квазиэндоморфизм T неэргодический. Второе определение эргодического квазиэндоморфизма T: T эргодический тогда и только тогда, когда $\mu\left(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T^iA\right) = 1$ для любого A положительной меры.

Пусть M — криволинейная трапеция:

$$M = \{(x, y) : \quad 0 \leqslant x < 1, \;\; 0 \leqslant y < l(x)\}, \text{где} \quad \int\limits_0^1 l(x)dx = 1. \tag{1}$$

Разделим M на m^2, $m > 1$, криволинейных трапеций прямыми $x = \frac{i}{m}$, $i = \overline{1, m-1}$, и кривыми $y = \frac{j}{m}l(x)$, $j = \overline{1, m-1}$. При этом считаем отрезки деления присоединенными к тем трапециям, от которых они расположены слева или снизу.

Эти m^2 множеств назовем трапециями первого порядка и обозначим $M_i^1,\ i=\overline{1,\,m^2}$. Эти трапеции занумеруем так, чтобы каждая трапеция M_i^1 имела общую сторону или общую вершину с трапециями M_{i-1}^1 и M_{i+1}^1.

Аналогично разбиваем каждоеM_i^1 на $m^2,\ m>1$, криволинейных трапеций M_i^2, $i=\overline{1,\,m^2}$, получаем m^4 трапеций второго порядка $M_i^2,\ i=\overline{1,\,m^4}$. Нумерацию множеств M_i^2 проводим так, чтобы выполнялись условия: 1) Нумерация трапеций второго порядка должна быть согласована с нумерацией трапеций первого порядка, то есть сначала перенумеровываются трапеции, входящие в M_1^1, затем последовательно в M_2^1, M_3^1, ..., $M_{m^2}^1$.

2) Каждая трапеция $M_i^2,\ i=\overline{1,\,m^4}$ имеет с трапециями M_{i-1}^2 и M_{i+1}^2 общую сторону или общую вершину.

Далее аналогично по индукции строятся криволинейные трапеции n-го порядка с выполнением условий 1) и 2) для $n=\overline{3,\,\infty}$.

Определим квазиэндоморфизм T множества M следующим образом. Положим прообразом множества M_i^1 i-й столбец трапеций второго порядка. Прообразом M_i^k является i-й столбец множеств $k+1$-го порядка. В пределе получаем

$$T^{-1}(x,y)=T^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}M_{i_k}^k(x,y)\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}T^{-1}M_{i_k}^k(x,y),$$

где $M_{i_k}^k(x,y)$ — трапеции k-го порядка, содержащие точку (x,y).

Так как прообразами $M_{i_k}^k(x,y)$ являются столбцы прообразов $(k+1)$-го порядка, то в результате прообразом точки (x,y) является вертикальный отрезок трапеции. Этим самым определяется квазиэндоморфизм T отрезка $[0,\,1)$, который не сохраняет меру и является непрерывным нигде не дифференцируемым отображением.

Если отобразить трапеции M_i^k на отрезке $[0,\,1)$ так, что все эти отрезки имеют вид $[a,\,b)$, расположены так, что первый M_1^k, затем M_2^k и т. д., причем длина отрезка равна $\mu(M_i^k)$, то получаем изоморфизм M на $[0,\,1)$, и квазиэндоморфизм T пространства M переходит в квазиэндоморфизм отрезка $[0,\,1)$, который является непрерывным нигде не дифференцируемым отображением.

Если теперь взять отображение $(x,y)\to\left(x,\frac{y}{l(x)}\right)$, то получим, что криволинейная трапеция становится квадратом, причем все трапеции всех порядков тоже становятся квадратами, мера сохраняется. В результате преобразования получаем эндоморфизм, который является точным (см. [1]).

Если допустить кусочно-непрерывные квазиэндоморфизмы, то можно построить эргодический неточный квазиэндоморфизм и неэргодический квазиэндоморфизм. Для этого надо перенумеровать криволинейные трапеции подходящим образом. Например, прообразом i-го столбца, $i=\overline{1,m-1}$, криволинейных трапеций M_k^1 будут столбцы, состоящие из криволинейных трапеций второго порядка M_j^2, занумерованных подходящим образом, и входящие в $i{+}1$-й столбец трапеций M_k^1, а прообразом m-го столбца трапеций M_k^1 является первый столбец трапеций M_k^1. Тогда получается эргодический неточный квазиэндоморфизм, так как $\forall M_i^2\quad \lim\limits_{n\to\infty}\mu(T^nM_i^2)=\frac{1}{m}$, а $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}T^nM_k^2\right)=1$.

Если, например, первый столбец трапеций M_k^1, являющийся прообразом каждой трапеции M_k^1 из этого столбца, есть столбец трапеций второго порядка, также входящий в тот же столбец трапеций M_k^1. В результате получаем, что образами первого столбца криволинейных трапеций является сам этот столбец. Отсюда следует, что это неэргодический квазиэндоморфизм, а значит, и соответствующий эндоморфизм, полученный приведением к инвариантной мере, является неэргодическим.

Рассмотрим теперь случай, когда к криволинейной трапеции $M(1)$ применяется квазиэндоморфизм, который определяется следующим образом: криволинейные трапеции первого порядка строятся так, что вертикальные стороны определяются формулами $x = \alpha_i$, где $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < \alpha_m = 1$, и кривыми $y = \beta_i l(x)$, где $0 = \beta_0 < \ldots < \beta_m = 1$.

Криволинейные трапеции второго порядка строятся так: если трапеция первого порядка расположена между прямыми $x = \alpha_{i-1}$ и $x = \alpha_i$, а также между кривыми $y = \beta_{j-1} l(x)$ и $y = \beta_j l(x)$, то четыре криволинейных трапеции второго порядка получаются делением прямой $x = \alpha_{i-1} + \frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$ и кривой $y = \left(\beta_{j-1} + \frac{1}{2}(\beta_j - \beta_{j-1})\right) l(x)$.

Криволинейные трапеции третьего и высших порядков строятся подобным образом, то есть делением пополам по вертикали и горизонтали. Если сохранять ту же нумерацию трапеций всех порядков, то получаем квазиэндоморфизмы, которые в зависимости от нумераций трапеций могут быть точными, эргодическими не точными и неэргодическими.

Остается заметить, что инвариантная мера задается преобразованием: если $(x, y) \in \in M_k^1$, где $\alpha_{i-1} \leqslant x < \alpha_i$, $\beta_{j-1} l(x) \leqslant y(x) < \beta_j l(x)$, то к инвариантной мере приводит преобразование: $x \mapsto \frac{i-1}{m} + \frac{x - \alpha_{i-1}}{m(\alpha_i - \alpha_{i-1})}$, $y \mapsto \frac{y(x)}{l(x)}$.

Действительно, при этом преобразовании все криволинейные трапеции всех порядков превращаются в правильные квадраты и мера сохраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарапов, В. Г. Эргодические свойства непрерывных нигде не дифференцируемых отображений / В. Г. Шарапов // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Мат. Физ. — Вып. 1. — 1996. — С. 50–54.

INVARIANT MEASURES OF QUASIENDOMORPHISMS GIVEN BY NOWHERE DIFFERENTIABLE MAPS

V.G. Sharapov

In the paper a method of constructing of invariant measures for one class of quasiendomorphisms, which are continuous nowhere differentiable functions, is given. Cases of exact, ergodic nonexact and nonergodic quasiendomorphisms are considered.

Key words: *invariant measures, continuous nowhere differentiable functions, exact and ergodic quasiendomorphisms, exact transformations, ergodicity, quasiendomorphisms.*