DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2020.4.5

УДК 519.178
ББК 22.176

Дата поступления статьи: 03.08.2020
Дата принятия статьи: 17.11.2020

ПЛАНИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ПЕРЕВОЗОК С МИНИМАЛЬНЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

Екатерина Владимировна Хижнякова

Ассистент кафедры компьютерных наук и экспериментальной математики,
Волгоградский государственный университет
kate1995yakovleva@gmail.ru, yakovleva.e.v@volsu.ru
просп. Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В данной статье рассматривается задача такого планирования перевозок, что при учете пропускной способности отдельных участков сети и непрямолинейности кратчайших путей транспортные расходы минимальны. В результате разработан алгоритм, минимизирующий затраты на транспортировку по готовой транспортной сети с учетом ограниченной пропускной способности отдельных участков. Алгоритм основан на решении задачи линейного программирования.

Ключевые слова: транспортная сеть, перевозки, кратчайший путь, поток, пропускная способность, линейное программирование.

Введение

Классическая транспортная задача об оптимальном плане перевозок описана в любом руководстве по математическим методам в транспортной науке. С ее постановкой и свойствами можно ознакомиться, например, в [2]. Но стоит отметить, что есть еще два фактора, которые необходимо дополнительно учитывать при планировании перевозок. Во-первых, величина непрямолинейности маршрутов, соединяющих две точки транспортной сети. Математически это значение можно рассчитать как отношение длины кратчайшего пути между этими точками к расстоянию между ними по прямой. Это значение всегда больше 1 и на реальных городских транспортных сетях может превышать 2. Разница между этой величиной и единицей, умноженная на 100 %, дает процент естественных потерь (например, в виде расхода топлива, временных затрат и т. д.) при транспортировке по данной транспортной сети. Вторым фактором является ограниченная пропускная способность дорожных участков транспортной сети. Если даже решение классической задачи дает оптимальный план транспортировки, то может сложиться ситуация, когда транспортировка в нужное время не может быть осуществлена из-за перегруженности участков сети. Задача состоит в том, чтобы составить транспортный план, в котором все транспортные потребности будут полностью удовлетворены и в то же время общие транспортные расходы достигнут своего минимума. Следует отметить, что при отсутствии ограничений на максимальную нагрузку на дорогу эта задача решается тривиально: все ij единиц груза должны перевозиться по кратчайшему пути из i в j.

1. Постановка задачи

Дана транспортная сеть, состоящая из n узлов. Пусть $G = (P, E)$ — плоский граф, представляющий транспортную сеть. Из пункта P_i $(i = 1, 2, ..., n)$ в пункт P_j $(j = 1, 2, ..., n)$ необходимо доставить v_{ij} единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза на единицу расстояния известна и составляет c денежных единиц. Отметим, что величины v_{ij} всегда можно считать неотрицательными числами для любых i, j.

Для каждой пары $i, j \in P$ определим множество γ_{ij} всех простых путей из i в j. Для ясности изложения пусть элементы этого множества будут пронумерованы и подчиняться правилу $|\gamma_{ij}^k| \leq |\gamma_{ij}^{k+1}|$. Таким образом, γ_{pq}^0 есть кратчайший путь из i в j. Эти пути образуют маршруты, по которым возможны перевозки.

Если распределить v_{ij} единиц груза по всем путям из γ_{ij}, то величина v_{ij}^k $(k = 1, 2, ..., n_{ij})$ равна количеству единиц груза, распределенному на перевозку по маршруту γ_{ij}^k. Среди этих величин допускаются нулевые.

Предположим, что необходимо организовать оптимальную перевозку грузов вдоль транспортной сети этого графа. Тогда общие затраты на перевозки вычисляются по формуле

$$F(v) = c \cdot \sum_{p \neq q} \sum_{k=1}^{n_{pq}} |\gamma_{pq}^k| v_{pq}^k. \tag{1}$$

Далее для каждого ребра e графа G зададим его максимальную нагрузку $\theta(e)$. В качестве этой величины выступает число грузов, которое можно через него перевезти:

$$N(e) = \sum_{\gamma_{pq}^k \ni e} v_{pq}^k. \tag{2}$$

Требуется определить набор χ величин $v_{ij}^k(i, j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., n_{ij}$, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} v_{ij}^k = v_{ij}, \tag{3}$$

$$N(e) \leq \theta(e), \tag{4}$$

$$v_{ij}^k \geq 0(i, j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., n_{ij}, \tag{5}$$

и таких, что линейная форма (1) достигает своего минимума.

Равенство (3) гарантирует удовлетворение всех потребностей в перевозках. Неравенство (4) гарантирует, что дороги не будут перегружены. Функционал (1) является линейным, ограничения также линейны. Следовательно, мы получаем задачу линейного программирования.

Нужно отметить, что без ограничений вида (4) задача минимизации функционала (1) решается тривиально: надо всю перевозку из пункта p в пункт q распределить на кратчайший маршрут $\gamma_{pq} \in P_{pq}$. Другими словами,

$$c \cdot \sum_{p \neq q} \sum_{k=1}^{n_{pq}} |\gamma_{pq}^k| v_{pq}^k \geq c \cdot \sum_{p \neq q} |\gamma_{pq}| \sum_{k=1}^{n_{pq}} v_{pq}^k = c \cdot \sum_{p \neq q} |\gamma_{pq}| v_{pq}.$$

2. Алгоритм нахождения *k*-го по длине пути

Для решения поставленной задачи нужно уметь находить γ_{pq}^{i+1} при условии, что известны все члены последовательности $\left\{\gamma_{pq}^j\right\}_{j=0}^i$. Искать сразу все множество γ_{pq} для каждой пары pq нецелесообразно из-за того, что путей может существовать слишком много, а понадобятся единицы.

Перед описанием алгоритма необходимо ввести некоторые обозначения:

- W — множество рассмотренных вершин;
- ϑ — множество найденных путей из p в q;
- η — множество новых путей из p в q;
- $in(q) = \{u \in V : \exists (u, q) \in E\}$.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Установить начальные значения $W = \emptyset$, $\eta = \emptyset$, $\vartheta = \left\{\gamma_{pq}^j\right\}_{j=0}^i$.
2. Найти множество вершин $Q' = \{q' | q' \in in(q), q' \neq p, q' \notin W\}$.
3. Для каждого $q' \in Q'$:

   3.1. Найти $\vartheta_{pq'}$ — наиболее короткий путь из p в q', удовлетворяющий ряду следующих условий:

   - $\vartheta_{pq'} + (q', q) \notin \vartheta$;
   - $\vartheta_{pq'}$ не проходит через вершину q и вершины множества W.

   3.1.1. Если подходящие пути имеются в $\left\{\gamma_{pu}^i\right\}_{i=0}^j$, то из них выбирается путь с наименьшим i, то есть с минимальной длиной, а затем перейти к следующей вершине множества Q'.

   3.1.2. Найти подходящий путь из p в q' с помощью текущего алгоритма со следующими начальными значениями:

   - $W = W + q'$;
   - $\vartheta = \{\vartheta \setminus (q', q) | \vartheta \ni (q', q)\}$;
   - $\eta = \emptyset$.

   3.2. Если путь $\vartheta_{pq'}$ найден, то добавить к η путь $\vartheta_{pq'} + (q', q)$.

4. Если $\eta \neq \varnothing$, тогда из всех путей множества η выбрать наиболее короткий, иначе в $\left\{\gamma_{pq}^j\right\}_{j=0}^i$ уже содержатся все возможные пути из p в q.

3. Алгоритм построения плана оптимальных перевозок

1. Найти кратчайший путь γ_{pq}^0 из p в q $\forall$ $p \neq q$. Если $\exists p, q : v_{pq} > 0, \nexists \gamma_{pq}$, то конец алгоритма. Задача неразрешима. Существует направление, по которому необходимо перевезти груз, но не существует ни одного пути, по которому можно это сделать.

2. Определить множество перегруженных ребер E_{over}. Ребро e перегружено, если условие (4) не выполняется. Если $E_{over} = \varnothing$, тогда мы получаем тривиальный случай, то есть перевозку v_{pq} единиц груза осуществлять по кратчайшему маршруту γ_{pq} $\forall p, q$. Задача решена.
3. Если $E_{over} \neq \varnothing$, то необходимо разгрузить все ребра $e \in E_{over}$ следующим способом:

   3.1. $\forall \gamma^i_{pq} : \gamma^i_{pq} \ni e$ найти новый кратчайший путь из p в q по вышеописанному алгоритму.

   Если альтернативный путь не найден ни для одного пути ни одного перегруженного ребра, то задача неразрешима, ни одно ребро e из E_{over} разгрузить невозможно. Следовательно, с заданным объемом перевозок сеть не справится. Необходимо увеличить пропускную способность всех перегруженных ребер. Конец алгоритма.

   3.2. Решить задачу линейного программирования, описанную выше. Алгоритмы решения задач линейного программирования можно посмотреть, например, в [1]. В результате решения поставленной задачи получим оптимальное распределение потоков по всем найденным путям.

   Если решение задачи линейного программирования найдено, перейти к п. 4 В противном случае необходимо найти новые альтернативные пути, для чего нужно перейти к п. 3.1.
4. В результате перераспределения нагрузки некоторые ребра могут оказаться перегруженными. Если таковые имеются, обновляем и переходим к п. 3. Если таковых нет, то получаем решение задачи.

Заключение

В данной статье рассмотрена транспортная задача об оптимальном плане перевозок с учетом структуры и пропускной способности транспортной сети. Для решения этой задачи сформулирована математическая модель транспортной сети. Разработан также алгоритм, позволяющий минимизировать транспортные издержки при транспортировке по готовой транспортной сети с учетом ограниченной пропускной способности участков дорог. Алгоритм основан на решении задачи линейного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. — М. : Высшая школа, 1986. — 319 с.

2. Юдин, Д. Б. Задачи и методы линейного программирования. Задачи транспортного типа / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 184 с.

REFERENCES

1. Akulich I.L. *Matematicheskoe programmirovanie v primerakh i zadachakh* [Mathematical Programming in Examples and Problems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1986. 319 p.

2. Yudin D.B., Golshteyn E.G. *Zadachi i metody lineynogo programmirovaniya. Zadachi transportnogo tipa* [Problems and Methods of Linear Programming. Transport Type Tasks]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2010. 184 p.

TRANSPORTATION PLANNING WITH MINIMAL COSTS

Ekaterina V. Khizhnyakova

Assistant Lecturer, Department of Computer Science and Experimental Mathematics,
Volgograd State University
kate1995yakovleva@gmail.ru, yakovleva.e.v@volsu.ru
Prosp. Universitetsky, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. In this paper, the classical problem of optimal transport plan is considered taking into account the capacity of certain sections of the transport network. Let v_{pq} units of goods be delivered from point p to point q. At the same time, each section of the transport network has a limited capacity, which is expressed in a certain volume of goods that can be passed through it per unit of time. The goal is to distribute goods flows along different routes in such a way that all transport needs are completely satisfied, the roads are not overloaded, and at the same time the total transport costs (for example, in the form of fuel consumption,time costs, etc.) reach their minimum. It should be noted that without restrictions on capacity, the task is solved trivially: it is necessary to distribute all transportation from point p to point q on the shortest route. To solve this problem, a mathematical model of the transport network is formulated. It is proposed to reduce the solution of this problem to the solution of the linear programming problem. As a result, we propose an algorithm for planning transportation in such a way that the total costs will be the lowest. In addition, one of the algorithm steps required solving the problem of finding the k-th path along the length between 2 nodes. To solve this problem, the corresponding algorithm is proposed. This algorithm is recursive.

Key words: transport network, transportation, the shortest path, flow, capacity, linear programming.