DOI: https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.1

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Дата поступления статьи: 10.02.2021
Дата принятия статьи: 14.05.2021

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

Сергей Иванович Митрохин

Кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник,
Научно-исследовательский вычислительный центр
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
mitrokhin-sergey@yandex.ru
Ленинские горы, 1, стр. 4, 119992 г. Москва, Российская Федерация

Аннотация. Изучается спектр дифференциального оператора высокого нечетного порядка с периодическими граничными условиями. Асимптотика фундаментальной системы решений дифференциального уравнения, задающего оператор, получена методом последовательных приближений Пикара. С помощью этой фундаментальной системы решений изучены периодические граничные условия. В результате получено уравнение на собственные значения изучаемого дифференциального оператора, которое представляет собой квазиполином. Исследована индикаторная диаграмма этого уравнения, которая представляет собой правильный многоугольник. В каждом из секторов комплексной плоскости, определяемых индикаторной диаграммой, найдена асимптотика собственных значений исследуемого оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, спектральный параметр, периодические граничные условия, асимптотика решений дифференциального уравнения, асимптотика собственных значений.

Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальный оператор нечетного порядка, задаваемый дифференциальным уравнением

$$y^{(7)}(x)+q(x)y(x)=\lambda a^{7}y(x),\quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\quad a>0, \tag{1}$$

с периодическими граничными условиями

$$y(0)=y(\pi),\quad y^{(m)}(0)=y^{(m)}(\pi),\quad m=1,2,\ldots,6, \tag{2}$$

при этом $\rho(x)=a^{7}$ — весовая функция, $\lambda\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр, на потенциал $q(x)$ накладываются следующие условия гладкости:

$$q(x)\in C^{6}[0;\pi]. \tag{3}$$

1. Исторический обзор

Вопросы спектральной теории дифференциальных операторов, связанных с периодичностью коэффициентов или граничных условий, изучаются уже достаточно давно. В монографии [5, гл. 1, § 4] изучены свойства периодических решений для оператора второго порядка с гладкими коэффициентами. В работе [7] изучались дифференциальные операторы второго порядка с периодическими граничными условиями в случае гладкого потенциала. В работе [2] изучалась обратная задача для квадратичного пучка оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом.

Различные спектральные свойства дифференциальных операторов четвертого порядка с гладкими коэффициентами с периодическими (или антипериодическими) граничными условиями исследовались в работах [1; 3; 15; 16]. Сложность выкладок с возрастанием порядка дифференциальных операторов увеличивается в несколько раз.

В работе [12] автором изучены спектральные свойства дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами с разделенными граничными условиями, а в работе [13] изучена периодическая краевая задача для дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом. Для получения асимптотики спектра необходимо изучать индикаторную диаграмму, и в зависимости от вида индикаторной диаграммы для дифференциальных операторов четного порядка с периодическими (антипериодическими) граничными условиями возможен эффект «расщепления» кратных в главном приближении собственных значений, изученный автором в работах [10; 11].

Дифференциальные операторы нечетного порядка с периодическими граничными условиями фактически не изучались (даже с гладкими коэффициентами). В работе [9] автор изучил модельный дифференциальный оператор нечетного порядка с суммируемым потенциалом, была изучена индикаторная диаграмма, было показано, что эффекта «расщепления» в случае такого оператора не наблюдается. Цель нашей статьи — изучить оператор нечетного порядка с гладкими коэффициентами, изучить индикаторную диаграмму, найти асимптотику спектра и ответить на вопрос, будет ли наблюдаться эффект «расщепления» у такого оператора.

2. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра λ

Пусть $\lambda = s^7$, $s = \sqrt[7]{\lambda}$, причем для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[7]{1} = +1$. Обозначим через ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ различные корни седьмой степени из единицы:

$$\omega_k^7 = 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{7}(k-1)}, k = 1, 2, \ldots, 7; \quad \omega_1 = 1;$$
$$\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{7}} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) = z \neq 0; \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{7}} = z^2; \ldots; \tag{4}$$
$$\omega_n = z^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, 7; \quad \omega_{n+7} = \omega_7.$$

Числа ω_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ из (2) делят единичную окружность на семь равных частей и для них выполняются следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{7} \omega_k^m = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, 6; \quad \sum_{k=1}^{7} \omega_k^m = 7; \quad m = 0, \quad m = 7;$$
$$\sum_{k=0}^{6} \omega_m^k = 0, \quad m = 2, 3, \ldots, 7. \tag{5}$$

Аналогично монографии [14, гл. 2] устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение дифференциального уравнения* (1) *имеет следующий вид:*

$$y(x,s) = \sum_{k=1}^{7} C_k y_k(x,s); \quad y^{(m)}(x,s) = \sum_{k=1}^{7} C_k y_k^{(m)}(x,s), \ m = 1, 2, \ldots, 6, \tag{6}$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, 7)$ — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{7}$ справедливы следующие формулы и оценки:

$$y_k(x,s) = e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k A_6(x)}{s^6} + \frac{A_7^0(x)}{s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^8}\right)\right], \ k = 1, 2, \ldots, 7, \tag{7}$$

$$y_k^{(m)}(x,s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k sx}\left[1 + \frac{\omega_k A_6(x)}{s^6} + \frac{A_7^m(x)}{s^7} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|ax}}{s^8}\right)\right], \tag{8}$$
$$m = 1, 2, \ldots, 6; \ k = 1, 2, \ldots, 7;$$

$$A_6(x) = -\frac{1}{7a^6}\int_0^x q(t)dt, \quad A_6'(x) = -\frac{q(x)}{7a^6}; \quad A_6(0) = 0; \tag{9}$$

$$A_7^0(x) = \frac{3q(x) - 3q(0)}{7a^7}, \qquad A_7^1(x) = \frac{2q(x) - 3q(0)}{7a^7}; \ldots$$
$$A_7^n(x) = \frac{(3-n)q(x) - 3q(0)}{7a^7}, \qquad n = 0, 1, , 2, \ldots, 7. \tag{10}$$

При выводе формул (7)–(10) мы подбирали константы интегрирования таким образом, чтобы выполнялись следующие начальные условия:

$$A_6(0) = 0; \quad A_7^0(0) = 0; \quad y_k(0,s) = 1;$$

$$y_k^{(m)}(0,s)=(a\omega_k s)^m\left[1+\frac{0}{s^6}+\frac{A_7^m(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right], \tag{11}$$
$$m=1,2,\ldots,6; \qquad k=1,2,\ldots,7.$$

Для величины $A_7^n(x)$ справедливо свойство

$$\sum_{n=0}^{6}A_7^n(x)=\sum_{n=0}^{6}A_7^n(0)=D_7=-\frac{3q(0)}{a^7}. \tag{12}$$

Для вывода формул (8)–(11) необходимо функцию $y_k(x,s)$ из (7) продифференцировать шесть раз, получившееся выражение подставить в дифференциальное уравнение (1), приравнять коэффициенты при одинаковых степенях s и произвести необходимые оценки и упрощения.

3. Изучение граничных условий (2)

Применяя формулы (6), из граничных условий (2) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y(\pi,s)\overset{(2)}{=}y(0,s)\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{k=1}^{7}C_k y_k(\pi,s)= \\ =\displaystyle\sum_{k=1}^{7}C_k y_k(0,s)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{7}C_k[y_k(\pi,s)-y_k(0,s)]=0;\quad y_k(0,s)\overset{(11)}{=}1, & (13)\\ k=1,2,\ldots,7; \\ \dfrac{y^{(m)}(\pi,s)}{(as)^m}\overset{(2)}{=}\dfrac{y^{(m)}(0,s)}{(as)^m}\overset{(6)}{\Leftrightarrow}\displaystyle\sum_{k=1}^{7}C_k\left[\frac{y^{(m)}(\pi,s)}{(as)^m}-\frac{y_k^{(m)}(0,s)}{(as)^m}\right]=0, & (14)\\ \quad m=1,2,\ldots,6. \end{cases}$$

Система (13), (14) — система из семи однородных линейных уравнений с семью неизвестными $C_1,C_2,\ldots,C_7$, поэтому она имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(3) *имеет следующий вид:*

$$f(s)=\begin{vmatrix} y_1(\pi,s)-y_1(0,s) & y_2(\pi,s)-y_2(0,s) & \ldots & y_7(\pi,s)-y_7(0,s)\\ \dfrac{y_1'(\pi,s)}{as}-\dfrac{y_1'(0,s)}{as} & \dfrac{y_2'(\pi,s)}{as}-\dfrac{y_2'(0,s)}{as} & \ldots & \dfrac{y_7'(\pi,s)}{as}-\dfrac{y_7'(0,s)}{as}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{y_1^{(6)}(\pi,s)}{(as)^6}-\dfrac{y_1^{(6)}(0,s)}{(as)^6} & \dfrac{y_2^{(6)}(\pi,s)}{(as)^6}-\dfrac{y_2^{(6)}(0,s)}{(as)^6} & \ldots & \dfrac{y_7^{(6)}(\pi,s)}{(as)^6}-\dfrac{y_7^{(6)}(0,s)}{(as)^6} \end{vmatrix}=0, \tag{15}$$

$$y_k(0,s)\overset{(11)}{=}1,$$
$$\frac{y_k'(0,s)}{as}=\omega_k\left[1+\frac{A_7^1(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right],\ldots,\ \frac{y_k^{(6)}(0,s)}{(as)^6}=\omega_k^6\left[1+\frac{A_7^6(0)}{s^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)\right],$$
$$k=1,2,\ldots,7.$$

Применяя формулы (7)–(12), уравнение (15) можно переписать в следующем виде:

$$f(s)= \tag{16}$$

$$=\begin{vmatrix} [h_1-1]+\dfrac{\omega_1 h_1 A_6(\pi)}{s^6}+ & U_{12} & [h_7-1]+\dfrac{\omega_7 h_7 A_6(\pi)}{s^6}+ \\ +\dfrac{A_7^0(\pi)h_1}{s^7}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^8}\right) & & +\dfrac{A_7^0(\pi)h_7}{s^7}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^8}\right) \\ \omega_1[h_1-1]+\dfrac{\omega_1^2 h_1 A_6(\pi)}{s^6}+ & U_{22} & \omega_7[h_7-1]+\dfrac{\omega_7^2 h_7 A_6(\pi)}{s^6}+ \\ +\dfrac{\omega_1 h_1 A_7^1(\pi)-\omega_1 A_7^1(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^8}\right) & & +\dfrac{\omega_7 h_7 A_7^1(\pi)-\omega_7 A_7^1(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^8}\right) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^6[h_1-1]+\dfrac{\omega_1^7 h_1 A_6(\pi)}{s^6}+ & U_{72} & \omega_7^6[h_7-1]+\dfrac{\omega_7^6 h_7 A_6(\pi)}{s^6}+ \\ +\dfrac{\omega_1^6 h_1 A_7^6(\pi)-\omega_1^6 A_7^6(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^8}\right) & & +\dfrac{\omega_7^6 h_7 A_7^6(\pi)-\omega_7^6 A_7^6(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\dfrac{1}{s^8}\right) \end{vmatrix}=0,$$

где введены обозначения: $h_n=e^{a\omega_n s\pi}$;

$$U_{n_2}=\omega_2^{n-1}[h_2-1]+\frac{\omega_2^n h_2 A_6(\pi)}{s^6}+\frac{\omega_2^{n-1}h_2 A_7^6(\pi)-\omega_2^{n-1}A_7^6(0)}{s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right),\quad n=1,2,\dots,7.$$

Обозначим через Δ_0 определитель Вантермонда чисел $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_7$

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_6 & \omega_7 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & \omega_6^2 & \omega_7^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & \omega_3^6 & \dots & \omega_6^6 & \omega_7^6 \end{vmatrix}=$$

$$=\det \text{Wandermound's}\,(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_7)=\prod_{\substack{k>n\\ k,n=1,2,\dots,7}}=\Delta_0\neq 0. \tag{17}$$

Для определителя Δ_0 из (17) справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* (δ_{kn}) $(k,n=1,2,\dots,7)$ — *матрица алгебраических миноров к элементам* b_{kn} $(k,n=1,2,\dots,7)$ *определителя* Δ_0 *из* (17). *Тогда*

$$(\delta_{kn})=\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{17} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{27} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \dots & \delta_{37} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{71} & \delta_{72} & \dots & \delta_{77} \end{pmatrix}=\frac{\Delta_{00}}{7}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \dots & \omega_6^{-1} & -\omega_7^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & \dots & -\omega_6^{-2} & \omega_7^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\omega_1^{-5} & \omega_2^{-5} & -\omega_3^{-5} & \dots & \omega_6^{-5} & -\omega_7^{-5} \\ \omega_1^{-6} & -\omega_2^{-6} & \omega_3^{-6} & \dots & -\omega_6^{-6} & \omega_7^{-6} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство теоремы 3 можно найти в работе автора [8].

Разложим определитель $f(s)$ на сумму определителей по столбцам, получим

$$f(s)=f_0(s)+\frac{f_6(s)}{s^6}+\frac{f_7(s)}{s^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right)=0, \tag{19}$$

$$f_0(s)=\begin{vmatrix}1\cdot[h_1-1] & 1\cdot[h_2-1] & \dots & 1\cdot[h_7-1]\\ \omega_1[h_1-1] & \omega_2[h_2-1] & \dots & \omega_7[h_7-1]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6[h_1-1] & \omega_2^6[h_2-1] & \dots & \omega_7^6[h_7-1]\end{vmatrix}\overset{(17)}{=}$$

$$=\Delta_0\prod_{k=1}^{7}[h_k-1]=\Delta_0(e^{a\omega_1 s\pi}-1)(e^{a\omega_2 s\pi}-1)(\dots)(e^{a\omega_7 s\pi}-1),\tag{20}$$

при этом основное приближение уравнения (19) имеет вид $f_0(s)=0$,

$$f_6(s)=\begin{vmatrix}\omega_1h_1A_6(\pi) & 1\cdot[h_2-1] & \dots & 1\cdot[h_7-1]\\ \omega_1^2h_1A_6(\pi) & \omega_2[h_2-1] & \dots & \omega_7[h_7-1]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^7h_1A_6(\pi) & \omega_2^6[h_2-1] & \dots & \omega_7^6[h_7-1]\end{vmatrix}+\dots=$$

$$=\omega_1A_6(\pi)h_1\prod_{k=2}^{7}(h_k-1)+\omega_2A_6(\pi)h_2\prod_{\substack{k=2\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1)+\dots+$$

$$+\omega_7A_6(\pi)h_7\prod_{k=1}^{6}(h_k-1)=A_6(\pi)\sum_{k=1}^{7}\omega_kh_k\left(\prod_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{7}(h_n-1)\right);\tag{21}$$

$$f_7(s)=G_1-G_2+G_3-G_4+\dots+G_{13}-G_{14},\tag{22}$$

$$G_1=\begin{vmatrix}h_1A_7^0(\pi) & 1\cdot[h_2-1] & \dots & 1\cdot[h_7-1]\\ \omega_1h_1A_7^1(\pi) & \omega_2[h_2-1] & \dots & \omega_7[h_7-1]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6h_1A_7^6(\pi) & \omega_2^6[h_2-1] & \dots & \omega_7^6[h_7-1]\end{vmatrix}=$$

$$=h_1\prod_{k=2}^{7}(h_k-1)\begin{vmatrix}A_7^0(\pi) & 1 & \dots & 1\\ \omega_1A_7^1(\pi) & \omega_2 & \dots & \omega_7\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6A_7^6(\pi) & \omega_2^6 & \dots & \omega_7^6\end{vmatrix};\tag{23}$$

$$G_2=\begin{vmatrix}A_7^0(0) & 1\cdot[h_2-1] & \dots & 1\cdot[h_7-1]\\ \omega_1A_7^1(0) & \omega_2[h_2-1] & \dots & \omega_7[h_7-1]\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6A_7^6(0) & \omega_2^6[h_2-1] & \dots & \omega_7^6[h_7-1]\end{vmatrix}=$$

$$=\prod_{k=2}^{7}(h_k-1)\begin{vmatrix}A_7^0(0) & 1 & \dots & 1\\ \omega_1A_7^1(0) & \omega_2 & \dots & \omega_7\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6A_7^6(0) & \omega_2^6 & \dots & \omega_7^6\end{vmatrix};\tag{24}$$

$$A_7^0(0)=0;$$

$$G_3=\begin{vmatrix}1 & A_7^0(\pi) & 1 & \dots & 1\\ \omega_1 & \omega_2A_7^1(\pi) & \omega_3 & \dots & \omega_7\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6 & \omega_2^6A_7^6(\pi) & \omega_3^6 & \dots & \omega_7^6\end{vmatrix}h_2\prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1);\tag{25}$$

$$G_4 = \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1)\begin{vmatrix} 1 & A_7^0(0) & 1 & \dots & 1\\ \omega_1 & \omega_2 A_7^1(0) & \omega_3 & \dots & \omega_7\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6 & \omega_2^6 A_7^6(0) & \omega_3^6 & \dots & \omega_7^6 \end{vmatrix}; \tag{26}$$

$$\dots$$

$$G_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & A_7^0(\pi)\\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_6 & \omega_7 A_7^1(\pi)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & \dots & \omega_6^6 & \omega_7^6 A_7^6(\pi) \end{vmatrix} h_7\prod_{k=1}^{6}(h_k-1); \tag{27}$$

$$G_{14} = \prod_{k=1}^{6}(h_k-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & A_7^0(0)\\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_6 & \omega_7 A_7^1(0)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \omega_1^6 & \omega_2^6 & \dots & \omega_6^6 & \omega_7^6 A_7^6(0) \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Раскладывая определители из (23), (24) по первому столбцу, применяя формулы (18) и (12), получаем

$$\begin{aligned} G_1 &= h_1\prod_{k=2}^{7}(h_k-1)\sum_{n=1}^{7}(-1)^{n-1}\omega_1^{n-1}A_7^{n-1}(\pi)\delta_{n1} =\\ &= h_1\prod_{k=2}^{7}(h_k-1)\frac{\Delta_0}{7}\sum_{n=1}^{7}(-1)^{n-1}\omega_1^{n-1}A_7^{n-1}(\pi)(-1)^{n-1}\omega_1^{1-n} =\\ &= h_1\prod_{k=2}^{7}(h_k-1)\frac{\Delta_{00}}{7}D_7; \end{aligned} \tag{29}$$

$$G_2 = \prod_{k=2}^{7}(h_k-1)\frac{\Delta_{00}}{7}D_7. \tag{30}$$

Аналогичным образом выводятся формулы для величин $G_3, G_4, \dots, G_{13}, G_{14}$ из выражений (25)–(28)

$$\begin{gathered} G_3 = h_2\prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1)\tfrac{\Delta_0}{7}D_7; \quad G_4 = \prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1)\tfrac{\Delta_0}{7}D_7;\\ \dots \qquad\qquad \dots\\ G_{13} = h_7\prod_{k=1}^{6}(h_k-1)\tfrac{\Delta_0}{7}D_7; \quad G_{14} = \tfrac{\Delta_{00}}{7}D_7\prod_{k=1}^{6}(h_k-1). \end{gathered} \tag{31}$$

Значит, из формул (22)–(31) выводим

$$f_7(s) = \frac{\Delta_0 D_7}{7}\Bigg\{h_1\prod_{k=2}^{7}(h_k-1) - \prod_{k=2}^{7}(h_k-1) + h_2\prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1) -$$

$$-\prod_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{7}(h_k-1)+\dots+h_7\prod_{k=1}^{6}(h_k-1)-\prod_{k=1}^{6}(h_k-1)\Bigg\}=$$

$$=\frac{\Delta_0 D_7}{7}\Bigg\{\sum_{k=1}^{7}h_k\Bigg(\prod_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{7}(h_k-1)\Bigg)-\sum_{k=1}^{7}\Bigg(\prod_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{7}(h_n-1)\Bigg)\Bigg\}. \quad (32)$$

4. Изучение индикаторной диаграммы

Чтобы найти корни уравнения $f(s)=0$ из (19)–(22), (32), нужно изучить индикаторную диаграмму (см. [4, гл. 12]) этого уравнения, то есть выпуклую оболочку показателей экспонент, входящих в основное приближение $f_0(s)=0$ (из (20)). Из формулы (20) имеем

$$f_0(s)=\Delta_0\Bigg\{(-1)+\sum_{k=1}^{7}e^{a\omega_k s\pi}-\sum_{\substack{k,n=1\\k\neq n}}^{7}e^{a(\omega_k+\omega_n)s\pi}+$$

$$+\sum_{n_1,n_2,n_3=1}^{7}e^{a(\omega_{n_1}+\omega_{n_2}+\omega_{n_3})s\pi}-\dots\Bigg\}=0. \quad (33)$$

Значит, индикаторная диаграмма уравнений (19)–(22) и (33) — это выпуклая оболочка множества точек $0;\omega_{n_1};\ \omega_{n_1}+\omega_{n_2};\ \omega_{n_1}+\omega_{n_2}+\omega_{n_3};\ \omega_{n_1}+\omega_{n_2}+\omega_{n_3}+\omega_{n_4},\dots$, где $n_m\in\{1,2,\dots,7\}$, $m=1,2,\dots,7$, при этом индексы попарно различны.

Вид индикаторной диаграммы представлен на рисунке 1.

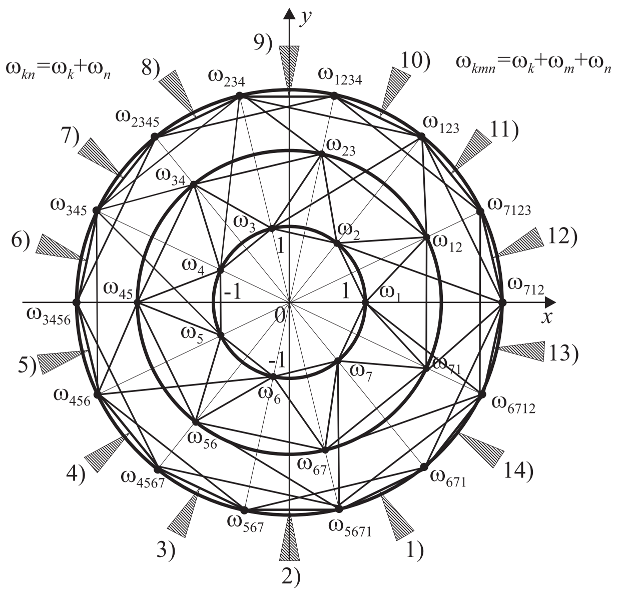

Рис. 1

Таким образом, индикаторная диаграмма — выпуклый правильный четырнадцатиугольник $\omega_{123}\omega_{1234}\omega_{234}\omega_{2345}\dots\omega_{712}\omega_{7123}\omega_{123}$. Корни уравнения $f_0(s)=0$ из (19)–(32)

находятся в четырнадцати секторах 1), 2), 3),..., 14) бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого четырнадцатиугольника.

На рисунке 1 показано, что на самой маленькой окружности радиуса $R_1 = 1$ расположены семь точек $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_7$; на внутренней окружности радиуса $R_2 = |\omega_1 + \omega_2| > 1$ расположены семь точек $\omega_k + \omega_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, 7$, точки $\omega_{n_1} + \omega_{n_2}$ при условии $|n_1 - n_2| \geqslant 2$ попадают внутрь этой окружности и на асимптотику корней уравнения (19)–(22) не влияют; на самой большой окружности радиуса $R_3 = |\omega_1 + \omega_2 + \omega_3| = |\omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7| > |\omega_1 + \omega_2|$ находятся семь точек $\omega_k + \omega_{k+1} + \omega_{k+2}$, $k = 1, 2, \ldots, 7$, и семь точек $\omega_k + \omega_{k+1} + \omega_{k+2} + \omega_{k+3}$, $k = 1, 2, \ldots, 7$ (так как $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_7 = 0$, то $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \overset{(5)}{=} -\omega_5 - \omega_6 - \omega_7$ и т. д.), точки $\omega_{n_1} + \omega_{n_2} + \omega_{n_3}$ при условии $|n_1 - n_2| \geqslant 2$ или $|n_1 - n_3| \geqslant 2$ или $|n_2 - n_3| \geqslant 2$ попадают внутрь этой окружности и на асимптотику корней уравнения (19)–(22) не влияют. Точки вида $\omega_{n_1} + \omega_{n_2} + \omega_{n_3} + \omega_{n_4} + \omega_{n_5} \overset{(5)}{=} -\omega_{n_6} - \omega_{n_7}$ попадают на внутреннюю окружность или внутрь нее и на асимптотику корней уравнения (19)–(22) не влияют.

5. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы

Чтобы найти асимптотику корней уравнения (19)–(22) в секторе 1), в этом уравнении необходимо оставить экспоненты с показателями $\bar{\omega}_{671} = \omega_{123} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ и $\bar{\omega}_{5671} = \omega_{1234} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

Теорема 4. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (1)–(3) *в секторе* 1) *имеет следующий вид:*

$$g_1(s) = g_{1,0}(s) + \frac{g_{1,6}(s)}{s^6} + \frac{g_{1,7}(s)}{s^7} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) = 0, \tag{34}$$

$$g_{1,0}(s) \overset{(20)}{=} \Delta_0 [e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi} - e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3)s\pi}]; \tag{35}$$

$$g_{1,6}(s) \overset{(21)}{=} \Delta_0 A_6(\pi) [(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi} - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3)s\pi}]; \tag{36}$$

$$g_{1,7}(s) \overset{(22)-(32)}{=} \frac{\Delta_0 D_7}{7} [e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)s\pi} - e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3)s\pi}], \tag{37}$$

при этом основное приближение имеет вид $g_{1,0}(s) \overset{(35)}{=} 0$.

Поделим в уравнении (34)–(37) на $\Delta_0 e^{a(\omega_1+\omega_2+\omega_3)s\pi} \neq 0$, приведем его к следующему виду:

$$g_1(s) = [e^{a\omega_4 s\pi} - 1] + \frac{A_6(\pi)}{s^6} [(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) e^{a\omega_4 s\pi} - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)] + \frac{D_7}{7s^7} [e^{a\omega_4 s\pi} - 1] + \underline{O}\left(\frac{1}{s^8}\right) = 0. \tag{38}$$

Основное приближение уравнения (38) имеет вид

$$e^{a\omega_4 s\pi} - 1 \Leftrightarrow e^{a\omega_4 s\pi} = 1 \Leftrightarrow e^{2\pi i k} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}} = \frac{2ik}{a\omega_4}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Из общей теории нахождения корней квазиполиномов вида (34)–(38) (см. [4, гл. 12; 6]) и формулы (39) следует следующее утверждение.

Теорема 5. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(3) *в секторе 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,1}=\frac{2i}{a\omega_4}\left[k+\frac{d_{6k,1}}{k^3}+\frac{d_{7k,1}}{k^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^8}\right)\right],\quad k\in\mathbb{N}. \tag{40}$$

Доказательство. Применяя формулы Маклорена, имеем

$$e^{a\omega_4 s\pi}\Big|_{s_{k,1}}=\exp\left[a\omega_4\pi\frac{2i}{a\omega_4}\left(k+\frac{d_{6k,1}}{k^6}+\ldots\right)\right]=1+\frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6}+\frac{2\pi i d_{7k,1}}{k^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^8}\right), \tag{41}$$

$$\frac{1}{s^6}\bigg|_{s_{k,1}}=\frac{a^6\omega_4^6}{2^6 i^6}\frac{1}{k^6}\left(1-\frac{6d_{6k,1}}{k^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^8}\right)\right). \tag{42}$$

Подставляя формулы (40)–(42) в уравнение (38), получаем

$$\left[1+\frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6}+\frac{2\pi i d_{7k,1}}{k^7}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^8}\right)-1\right]+\frac{A_6(\pi)a^6\omega_4^6}{2^6 i^6 k^6}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right)\times$$
$$\times\left[(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)\left(1+\frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right)-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\right]+$$
$$+\frac{D_7 a^7\omega_4^7}{7\cdot 2^6 i^7 k^7}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)\right)\left[1+\frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6}+\underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right)-1\right]+\underline{O}\left(\frac{1}{k^8}\right)=0. \tag{43}$$

Приравнивая в уравнении (43) коэффициенты при k^{-6}, получаем

$$2\pi i d_{6k,1}+\frac{A_6(\pi)a^6\omega_4^6}{2^6 i^6}[(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)],$$

откуда выводим

$$d_{6k1}=-\frac{1}{2\pi i}\frac{A_6(\pi)a^6\omega_4^7}{2^6(-1)}\overset{(9)}{=}\frac{i}{7\pi 2^7}\int_0^\pi q(t)dt,\quad k=1,2,3,\ldots \tag{44}$$

Приравнивая в уравнении (43) коэффициенты при $\frac{1}{k^7}$, получаем

$$2\pi i d_{7k,1}+\frac{D_7 a^7\omega_4^7}{2^7 i^7}[1-1]=0,$$

откуда выводим

$$d_{7k,1}=0,\quad k=1,2,3,\ldots \tag{45}$$

Формулы (44), (45) показывают, что коэффициенты $d_{6k,1}, d_{7k,1}$ асимптотического разложения (40) находятся единственным образом, при этом мы привели явные формулы для их вычисления, поэтому теорема 5 полностью доказана.

Изучая тем же способом сектора 2), 3),. . . ,14) индикаторной диаграммы рисунка 1, приходим к выводу о справедливости следующей теоремы.

Теорема 6. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (1)–(3) *удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$s_{k,2} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{14}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2} e^{\frac{2\pi i}{14}}; \ldots ; s_{k,m} = s_{k,m-1} e^{\frac{2\pi i}{14}} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{14}(m-1)}, \tag{46}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots, 14. \tag{47}$$

При этом

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^7, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, 14; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{48}$$

Точности амиптотических формул (40), (44)–(47) достаточно для исследования свойств собственных функций оператора (1)–(3) и получения формулы первого регуляризованного следа этого оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдуллаев, А. Р. Периодическая краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка / А. Р. Абдуллаев, Е. А. Скачкова // Известия вузов. Математика. — 2013. — № 12. — С. 3–10.

2. Бабаджанов, Б. А. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом / Б. А. Бабаджанов, А. Б. Хасанов, А. Б. Яхшимуратов // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 3. — С. 298–305.

3. Баданин, А. В. Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка / А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 5. — С. 1–48.

4. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

5. Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М. : Мир, 1970. — 672 с.

6. Лидский, В. Б. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций / В. Б. Лидский, В. А. Садовничий // Математический сборник. — 1968. — Т. 65, № 4. — С. 558–566.

7. Марченко, В. А. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка / В. А. Марченко // Труды Московского математического общества. — 1952. — С. 327–420.

8. Митрохин, С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией / С. И. Митрохин // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 6. — С. 31–47.

9. Митрохин, С. И. Асимптотика спектра периодической краевой задачи для дифференциального оператора с суммируемым потенциалом / С. И. Митрохин // Труды ИММ УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 136–149.

10. Митрохин, С. И. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений / С. И. Митрохин // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2017. — Т. 17, № 1. — С. 5–18.

11. Митрохин, С. И. О «расщеплении» кратных в главном собственных значений многоточечных краевых задач / С. И. Митрохин // Известия вузов. Математика. — 1997. — № 3. — С. 38–43.

12. Митрохин, С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами / С. И. Митрохин // Труды МИАН. — 2010. — Т. 270. — С. 188–197.

13. Митрохин, С. И. Периодическая краевая задача для дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом / С. И. Митрохин // Владикавказский математический журнал. — 2017. — Т. 19, № 4. — С. 35–49.

14. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

15. Поляков, Д. М. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 5. — С. 75–79.

16. Поляков, Д. М. Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями / Д. М. Поляков // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 5. — С. 117–152.

REFERENCES

1. Abdullaev A.R., Skachkova E.A. Periodicheskaya kraevaya zadacha dlya differentsialnogo uravneniya chetvertogo poryadka [Periodic Boundary Value Problem for a Fourth-Order Differential Equation]. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2013, no. 12, pp. 3-10.

2. Babadzhanov B.A., Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. Ob obratnoy zadache dlya kvadratichnogo puchka operatorov Shturma-Liuvillya s periodicheskim potentsialom [On the Inverse Problem for a Quadratic Pencil of Sturm-Liouville Operators with Periodic Potential]. *Differentsialnye uravneniya*, 2005, vol. 41, no. 3, pp. 298-305.

3. Badanin A.V., Korotyaev E.L. Spektralnye otsenki dlya periodicheskogo operatora chetvertogo poryadka [On the Inverse Problem for a Quadratic Pencil of Sturm-Liouville Operators with Periodic Potential]. *Algebra i analiz*, 2010, vol. 22, no. 5, pp. 1-48.

4. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsialno-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.

5. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Vvedenie v spektralnuyu teoriyu* [Introduction to Spectral Theory]. Moscow, Mir Publ., 1970. 672 p.

6. Lidskiy V.B., Sadovnichiy V.A. Asimptoticheskie formuly dlya korney odnogo klassa tselykh funktsiy [Asymptotic Formulas for the Roots of One Class of Entire Functions]. *Matematicheskiy sbornik*, 1968, vol. 65, no. 4, pp. 558-566.

7. Marchenko V.A. Nekotorye voprosy teorii odnomernykh lineynykh differentsialnykh operatorov vtorogo poryadka [Some Questions of the Theory of One-Dimensional Linear Differential Operators of the Second Order]. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, 1952, pp. 327-420.

8. Mitrokhin S.I. Asimptotika sobstvennykh znacheniy differentsialnogo operatora so znakoperemennoy vesovoy funktsiey [Asymptotics of Eigenvalues of Differential Operator with Alternating Weight Function]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2018, no. 6, pp. 31-47.

9. Mitrokhin S.I. Asimptotika spektra periodicheskoy kraevoy zadachi dlya differentsialnogo operatora s summiruemym potentsialom [Asymptotics of the Spectrum of a Periodic Boundary Value Problem for a Differential Operator with a Summable Potential]. *Trudy IMM UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 136-149.

10. Mitrokhin S.I. Mnogotochechnye differentsialnye operatory: «rasshcheplenie» kratnykh v glavnom sobstvennykh znacheniy [Multipoint Differential Operators: “Splitting” of Multiples in the Principal Eigenvalues]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2017, vol. 17, no. 1, pp. 5-18.

11. Mitrokhin S.I. O «rasshcheplenii» kratnykh v glavnom sobstvennykh znacheniy mnogotochechnykh kraevykh zadach [On the “Splitting” in the Main Approximation of Multiple Eigenvalues of Multipoint Boundary Value Problems]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 1997, no. 3, pp. 38-43.

12. Mitrokhin S.I. O spektralnykh svoystvakh differentsialnogo operatora chetvertogo poryadka s summiruemymi koeffitsientami [Spectral Properties of a Fourth-Order Differential Operator with Integrable Coefficients]. *Trudy MIAN*, 2010, vol. 270, pp. 188-197.

13. Mitrokhin S.I. Periodicheskaya kraevaya zadacha dlya differentsialnogo operatora chetvertogo poryadka s summiruemym potentsialom [A Periodic Boundary Value Problem for a Fourth-Order Differential Operator with a Summable Potential]. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 35-49.

14. Naymark M.A. *Lineynye differentsialnye operatory* [Linear Differential Operators]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 528 p.

15. Polyakov D.M. O spektralnykh svoystvakh differentsialnogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi i antiperiodicheskimi kraevymi usloviyami [On Spectral Properties of Fourth-Order Differential Operator with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Russian Mathematics], 2018, no. 5, pp. 75-79.

16. Polyakov D.M. Spektralnyy analiz differentsialnogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi i antiperiodicheskimi kraevymi usloviyami [Spectral Analysis of a Fourth-Order Differential Operator with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions]. *Algebra i analiz*, 2015, vol. 27, no. 5, pp. 117-152.

ASYMPTOTICS OF THE SPECTRUM OF A PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN ODD-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

Sergey I. Mitrokhin

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Senior Researcher,
Scientific-Research Computing Center of the Lomonosov Moscow State University
mitrokhin-sergey@yandex.ru
Leninskie Gory, 1, Bld. 4, 119992 Moscow, Russian Federation

Abstract. The spectrum of a differential operator of high odd order with periodic boundary conditions is studied. The asymptotics of the fundamental system of solutions of the differential equation defining the operator are obtained by the method of successive Picard approximations. With the help of this fundamental system of solutions the periodic boundary conditions are studied. As a result, the equation for the eigenvalues of the differential operator is obtained, which is quasi-polynomial. The indicator diagram of this equation, which is a regular polygon, is investigated. In each of the sectors of the complex plane, defined by the indicator diagram, the asymptotics of the eigenvalues of the operator is found. An equation for the eigenvalues of the differential operator is derived. The indicator diagram of this equation has been studied. The asymptotics of the eigenvalues of the studied operator in different sectors of the indicator diagram is found.

Key words: differential operator, spectral parameter, periodic boundary conditions, asymptotics of solutions of a differential equation, asymptotics of eigenvalues.