УДК 514.75
ББК 22.151

НЕПРЕРЫВНЫЕ *MG*-ДЕФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бодренко Андрей Иванович

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры фундаментальной информатики и оптимального управления
Волгоградского государственного университета
bodrenko@mail.ru
Проспект Университетский, 100, 400062 г. Волгоград, Российская Федерация

Аннотация. В статье исследуются свойства непрерывных деформаций двумерных поверхностей с краем в трехмерном евклидовом пространстве, поточечно сохраняющих грассманов образ и произведение главных кривизн поверхностей. Для двумерной односвязной ориентируемой поверхности F с краем ∂F в трехмерном евклидовом пространстве E^3 мы вводим понятие непрерывной MG-деформации и находим дифференциальные уравнения, определяющие весь класс MG-деформаций поверхности F в E^3. В работе доказан ряд лемм, в которых выводятся оценки норм функций, описывающих MG-деформации поверхности F. С использованием метода последовательных приближений и принципа сжимающих отображения мы доказываем основной результат данной статьи — теорему 1.

Ключевые слова: деформация поверхности, средняя кривизна, гауссова кривизна, G-деформация, непрерывная деформация.

§ 1. Основные определения. Формулировка результата

Пусть E^3 — трехмерное евклидово пространство, заданное в координатах (y^1, y^2, y^3). Здесь и далее считаем, что индексы суммирования $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают значения от 1 до 3, и действует правило суммирования Эйнштейна.

Пусть F — двумерная односвязная ориентируемая поверхность в E^3 с краем ∂F. Обозначим через D область в E^2, через ∂D — границу области D.

Пусть поверхность F в E^3 задана погружением $f : D \to E^3$:

$$y^\sigma = f^\sigma(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

На поверхности F порождается риманова метрика, задаваемая формулой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j},$$

и индексы i, j пробегают значения от 1 до 2, $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

В дальнейшем считаем, что формула верна для всех допустимых значений индексов, если не указано, для каких значений индексов данная формула имеет место.

Пусть b_{ij} — компоненты тензора второй основной формы поверхности F, $g = det||g_{ij}||$, $b = det||b_{ij}||$. Обозначим через

$$d\sigma(x) = \sqrt{g}\ dx^1 \wedge dx^2$$

элемент площади поверхности F.

Пусть (x^1, x^2) — декартовы прямоугольные координаты в E^2. Без ограничения общности будем считать, что $\overline{D} = D \cup \partial D$ — круг единичного радиуса в E^2 с центром в начале координат. Отождествим точки погружения поверхности F с соответствующими координатными наборами в E^3.

Пусть $F \in C^{m,\nu}$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$, $\nu \in (0;1)$, $m \geq 4$.

Рассмотрим деформацию $\{F_t\}$ поверхности F, определенную уравнениями:

$$y_t^\sigma = y^\sigma + z^\sigma(t), \quad z^\sigma(0) \equiv 0, \quad t \in [0;t_0], \quad t_0 > 0.$$

Пусть поверхность F не имеет действительных асимптотических направлений. Обозначим через k_1 и k_2 главные кривизны поверхности F. Будем считать, что $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ на F. Обозначим через $K = k_1k_2$ гауссову кривизну поверхности F в E^3.

Введем обозначение $\Delta(f) \equiv f(t) - f(0)$.

Определение 1. *Деформация $\{F_t\}$ называется непрерывной деформацией, сохраняющей произведение главных кривизн $K = k_1k_2$ (или M-деформацией [12]), если выполняются следующие условия: $\Delta(K) = 0$, и $z^\sigma(t)$ непрерывны по t.*

Деформация $\{F_t\}$ порождает следующий набор кривых в E^3:

$$u^{\alpha_0}(\tau) = (y^{\alpha_0} + z^{\alpha_0}(\tau)),$$

где $z^{\alpha_0}(0) \equiv 0$, $\tau \in [0;t]$, $t \in [0;t_0]$, $t_0 > 0$.

Определение 2. *Деформация $\{F_t\}$ называется G-деформацией, если каждый нормальный вектор поверхности F переносится параллельно вдоль траектории деформации $\{F_t\}$ для каждой точки поверхности.*

Пусть вдоль ∂F задано векторное поле, касательное к F:

$$v^\alpha = l^i y^\alpha_{,i}, \tag{1}$$

где символом «$_{,i}$» обозначена ковариантная производная в метрике поверхности F.

Рассмотрим краевое условие:

$$\delta_{\alpha\beta} z^\alpha v^\beta = \tilde{\gamma}(s,t), \quad s \in \partial D, \tag{2}$$

где функции v^α и $\tilde{\gamma}$ принадлежат классу $C^{m-2,\nu}$.

Положим:

$$\tilde{\lambda}_k = \delta_{\alpha\beta} y^\alpha_{,k} v^\beta, \qquad k = 1,2, \tag{3}$$

$$\lambda_k = \frac{\tilde{\lambda}_k}{(\tilde{\lambda}_1)^2 + (\tilde{\lambda}_2)^2}, \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

$$\lambda(s) = \lambda_1(s) + i\lambda_2(s), \quad s \in \partial D. \tag{5}$$

Пусть N — индекс данного краевого условия:

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D} \arg \lambda(s). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть $F \in C^{m,\nu}, \nu \in (0;1), m \geq 4$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$. Пусть $v^\beta, \tilde{\gamma} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$ и при этом функция $\tilde{\gamma}$ непрерывно дифференцируема по t. Пусть в точке $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$ области D выполняется условие: $z^\sigma(t) \equiv 0 \, \forall t$.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $N > 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\tilde{\gamma}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех $t \in [0, t_0)$ существует MG-деформация класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывная по t, непрерывно зависящая от $(2N-1)$ произвольных действительных непрерывных функций $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$, удовлетворяющих условиям $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$.

2. Если $N \leq 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех $t \in [0, t_0)$ существует не более одной MG-деформации класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывной по t.

§ 2. Вывод уравнений *G*-деформаций поверхностей в евклидовом пространстве

Будем решать поставленную задачу методами теории деформаций поверхностей [1–8].

Введем следующие обозначения:

$b_{ij}(t) \equiv b_{ij}(y^\sigma + z^\sigma(t)), \quad b_{ij}(0) \equiv b_{ij}, \quad b(t) \equiv b(y^\sigma + z^\sigma(t)), \quad b(0) \equiv b,$

$g_{ij}(t) \equiv g_{ij}(y^\sigma + z^\sigma(t)), \quad g_{ij}(0) \equiv g_{ij}, \quad g(t) \equiv g(y^\sigma + z^\sigma(t)), \quad g(0) \equiv g,$

$a^j(t) \equiv a^j, \quad c(t) \equiv c, \quad z^\sigma(t) \equiv z^\sigma.$

Положим:

$$z^\sigma(t) = a^j(t) y^\sigma,_j + c(t) n^\sigma, \tag{7}$$

где $a^j(0) \equiv 0, c(0) \equiv 0$.

Таким образом, деформация $\{F_t\}$ поверхности F, заданная формулой (1), определяется функциями a^j и c.

Мы имеем (см.: [13, с. 203]):

$$z^\alpha_{,i} = (a^i b_{ij} + c,_j) n^\alpha + (a^i,_j - c b_{jm} g^{mi}) y^\alpha,_i.$$

Условие G-деформации $\{F_t\}$ поверхности F эквивалентно следующему равенству:

$$\delta_{\alpha\beta}(y^\alpha_{,i} + z^\alpha_{,i}(t)) n^\beta = 0.$$

Таким образом, уравнения G-деформации $\{F_t\}$ поверхности F принимают вид:

$$a^l b_{li} + c,_i = 0, \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

§ 3. Уравнения G-деформаций в сопряженно изотермической системе координат

Введем на F сопряженно изотермическую систему координат (x^1, x^2). Обозначим $b_{ii} = V$, $i = 1, 2$, при этом $b_{12} = b_{21} = 0$. Тогда систему уравнений (8) можно записать в следующем виде:

$$c,_1 + Va^1 = 0,$$

$$c,_2 + Va^2 = 0. \tag{9}$$

Продифференцируем первое уравнение системы (9) по x^2, второе — по x^1, и вычтем из первого уравнения второе. Тогда мы получим:

$$V\partial_2 a^1 - V\partial_1 a^2 + \partial_2 V a^1 - \partial_1 V a^2 = 0. \tag{10}$$

Из (10) находим:

$$\partial_2 a^1 - \partial_1 a^2 + p_k a^k = 0, \tag{11}$$

где $p_1 = \partial_2(\ln V), p_2 = -\partial_1(\ln V)$. Заметим, что p_k не зависят от t.

Дифференцируя уравнение (11) по t, получаем следующее уравнение:

$$\partial_2 \dot{a}^1 - \partial_1 \dot{a}^2 + p_k \dot{a}^k = 0.$$

§ 4. Решение системы уравнений (9): нахождение функции $\dot{c}$ по функциям $\dot{a}^i$

Будем решать систему уравнений (9), предполагая, что функции a^1 и a^2 заданы. Заметим, что функция V не зависит от c, a^i.

Мы имеем:

$$c(x^1, x^2, t) = \int_0^t \dot{c}(x^1, x^2, \tau) d\tau, \quad (c(x^1, x^2, 0) = 0); \tag{12}$$

$$a^i(x^1, x^2, t) = \int_0^t \dot{a}^i(x^1, x^2, \tau) d\tau, \quad (a^i(x^1, x^2, 0) = 0); \tag{13}$$

$$a^i_{,k}(x^1, x^2, t) = \int_0^t \dot{a}^i_{,k}(x^1, x^2, \tau) d\tau, \quad (a^i_{,k}(x^1, x^2, 0) = 0). \tag{14}$$

Формулы (12)–(14) устанавливают связь между функциями c, a^i и $\dot{c}$, $\dot{a}^i$ соответственно. Это означает, что если функции $\dot{c}$, $\dot{a}^i$ найдены, то найдены и функции c, a^i.

Продифференцировав уравнения системы (9) по t, перейдем к следующей системе уравнений для функции $\dot{c}$:

$$\dot{c},_i = -V\dot{a}^i, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

где мы будем рассматривать функции $\dot{c}$, $\dot{a}^i$, $\dot{c}_{,i}$, $\dot{a}^i_{,j}$.

Преобразуем (15) в интегральное уравнение относительно функции $\dot{c}$. Пусть l^* — произвольная допустимая кривая в D с началом в точке $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$. Зададим l^* уравнениями: $x^1 = x^1(s), x^2 = x^2(s)$. Мы приходим к следующему уравнению.

$$\dot{c}(x^1, x^2, t) = \int\limits_{(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})}^{(x^1, x^2)} \left(-V\dot{a}^1\right) d\tilde{x}^1 + \left(-V\dot{a}^2\right) d\tilde{x}^2. \tag{16}$$

Уравнение (16) вдоль l^* принимает вид:

$$\dot{c}(x^1, x^2, t) = \int\limits_0^s \left(-V\dot{a}^1(s_1)\tilde{x}^{1'}(s_1) - V\dot{a}^2(s_1)\tilde{x}^{2'}(s_1)\right) ds_1. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет единственное решение в классе непрерывных функций для любых непрерывных функций $\dot{a}^i$ и $\partial_p \dot{a}^i$.

Следовательно, каждой паре функций $\dot{a}^i \in C^{m-2,\nu}$, $i = 1, 2$, соответствует единственная функция $\dot{c} \in C^{m-2,\nu}$ и, значит, единственная функция $c \in C^{m-2,\nu}$, определяемая из (12).

Лемма 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\exists t_0 > 0$ *такое, что* $a^k(t), \partial_i a^k(t), \dot{a}^k(t), \partial_i \dot{a}^k(t)$ *— непрерывны по* $t, \forall t \in [0, t_0]$, $a^k(0) \equiv 0, \partial_i a^k(0) \equiv 0$.

2) $\exists t_0 > 0$ *такое, что* $a^i(t) \in C^{m-2,\nu}$, $\partial_k a^i(t) \in C^{m-3,\nu}$, $\forall t \in [0, t_0]$.

Тогда $\exists t_* > 0$ *такое, что уравнение (16)* $\forall t \in [0, t_*]$ *имеет единственное решение класса* $C^{m-2,\nu}$*, непрерывное по* t.

Доказательство следует из того, что кривая l^* — произвольная допустимая в D, поэтому система уравнений (15) имеет единственное решение для любых непрерывных функций $\dot{a}^i$ и $\partial_p \dot{a}^i$.

§ 5. Вывод уравнений MG-деформаций поверхностей в евклидовом пространстве

Обозначим через g_t и b_t, соответственно, определители матриц первой и второй фундаментальных форм поверхности F_t. Тогда условие сохранения произведения главных кривизн при деформации $\{F_t\}$ поверхности F принимает следующий вид:

$$\Delta(g) = \frac{g}{b}\Delta(b),$$

где

$$\Delta(g) \equiv g_t - g, \quad \Delta(b) \equiv b_t - b,$$

Вычислим $\Delta(g_{ij})$. Мы имеем:

$$\Delta(g_{ij}) = \delta_{\alpha\beta}(y^\alpha{}_{,i} + z^\alpha{}_{,i})(y^\beta{}_{,j} + z^\beta{}_{,j}) - \delta_{\alpha\beta} y^\alpha{}_{,i} y^\beta{}_{,j} =$$
$$= \delta_{\alpha\beta} y^\alpha{}_{,i} z^\beta{}_{,j} + \delta_{\alpha\beta} y^\beta{}_{,j} z^\alpha{}_{,i} + \delta_{\alpha\beta} z^\alpha{}_{,i} z^\beta{}_{,j}. \tag{18}$$

Тогда, используя (18), находим:

$$g^{ij}\Delta(g_{ij}) = 2g^{ij}\delta_{\alpha\beta} y^\alpha{}_{,i} z^\beta{}_{,j} + \delta_{\alpha\beta} g^{ij} z^\alpha{}_{,i} z^\beta{}_{,j}. \tag{19}$$

Обозначим:

$$W_1 = \delta_{\alpha\beta} g^{ij} z^{\alpha},_{i} z^{\beta},_{j}. \tag{20}$$

В силу свойств определителя $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ мы имеем:

$$\Delta(g) = g g^{ij} \Delta(g_{ij}) + W_2, \tag{21}$$

где

$$W_2 = \Delta(g_{11})\Delta(g_{22}) - (\Delta(g_{12}))^2. \tag{22}$$

Учитывая равенство (19) и обозначение (20), запишем соотношение (21) в следующем виде:

$$\Delta(g) = 2g g^{ij} \delta_{\alpha\beta} y^{\alpha},_{i} z^{\beta},_{j} + gW_1 + W_2.$$

Отсюда,

$$\frac{\Delta(g)}{2g} = a^{l},_{l} - c b_{lm} g^{ml} + \frac{W_1}{2} + \frac{W_2}{2g}. \tag{23}$$

Используя формулу $\partial_i(\ln\sqrt{g}) = \Gamma_{ij}^{j}$, где Γ_{ij}^{k} — символы Кристоффеля для поверхности F в метрике g_{ij}, формулу для средней кривизны $2H = g^{im} b_{im}$, запишем уравнение (23) в виде:

$$\frac{\Delta(g)}{2\sqrt{g}} = \partial_l(\sqrt{g} a^l) - 2Hc\sqrt{g} + \frac{\sqrt{g} W_1}{2} + \frac{W_2}{2\sqrt{g}}. \tag{24}$$

Из уравнения (24) находим:

$$\frac{\Delta(g)}{2g} = \partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + a^1 \partial_1(\ln\sqrt{g}) + a^2 \partial_2(\ln\sqrt{g}) - \Psi_2,$$

где

$$\Psi_2 = 2Hc - \frac{W_1}{2} - \frac{W_2}{2g}.$$

Таким образом, получим следующую формулу:

$$\Delta(g) = 2g(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + q_k a^k - \Psi_2), \tag{25}$$

где

$$q_1 = \partial_1(\ln\sqrt{g}), q_2 = \partial_2(\ln\sqrt{g}).$$

Заметим, что q_k не зависят от t.

Соотношение (25) определяет $\Delta(g)$ при деформации $\{F_t\}$ поверхности F в E^3.

Выведем формулу для вычисления $\Delta(b)$. Мы имеем:

$$\Delta(b) = b b^{ij} \Delta(b_{ij}) + W_2^{(b)}, \tag{26}$$

где

$$W_2^{(b)} = \Delta(b_{11})\Delta(b_{22}) - (\Delta(b_{12}))^2.$$

Найдем $\Delta(b_{ij}) \equiv b_{ij}(t) - b_{ij}(0)$. Пусть вектор $n^{\beta}(t)$ получен в результате параллельного переноса единичного вектора нормали $n^{\beta}(0)$ в точку $(y^{\alpha} + z^{\alpha})$ вдоль траектории перемещения при деформации поверхности F. Для всех t имеем:

$$n^{\beta}(t) = n^{\beta}(0).$$

Пусть $\tilde{n}^\beta(t)$ — единичный вектор нормали в точке $(y^\alpha + z^\alpha)$.

Тогда:

$$\tilde{n}^\beta(t) = n^\beta(t).$$

Имеют место следующие формулы:

$$b_{ij}(0) = -\delta_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} n^\beta(0)_{,j},$$

$$b_{ij}(t) = -\delta_{\alpha\beta}(y^\alpha_{,i} + z^\alpha_{,i})\tilde{n}^\beta(t)_{,i}. \tag{27}$$

Запишем (27) в виде:

$$b_{ij}(t) = -\delta_{\alpha\beta} z^\alpha_{,i}\tilde{n}^\beta(t)_{,j} - \delta_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i}\tilde{n}^\beta(t)_{,j}.$$

Из (7) мы имеем:

$$z^\sigma,_i(t) = a^j,_i y^\sigma,_j + c,_i n^\sigma + a^j y^\sigma_{,j,i} + c n^\sigma_{,i}. \tag{28}$$

$$a^j,_i = \partial_i(a^j) + \Gamma^j_{pi} a^p. \tag{29}$$

Используя формулы (28) и (29), находим:

$$-\delta_{\alpha\beta} z^\alpha_{,i}\tilde{n}^\beta(t)_{,j} = -\delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k \tilde{n}^\beta(t)_{,j} + M^1_{ij}, \tag{30}$$

где

$$M^1_{ij} = -\delta_{\alpha\beta}(\Gamma^k_{pi} a^p y^\alpha,_k + c,_i n^\alpha + a^k y^\alpha_{,k,i} + c n^\alpha_{,i})\tilde{n}^\beta(t)_{,j}.$$

Запишем (30) в следующем виде:

$$-\delta_{\alpha\beta} z^\alpha_{,i}\tilde{n}^\beta(t)_{,j} = -\delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k n^\beta(0)_{,j} -$$

$$-\delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k \tilde{n}^\beta(t)_{,j} + \delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k n^\beta(0)_{,j} + M^1_{ij}. \tag{31}$$

Из (31) имеем:

$$-\delta_{\alpha\beta} z^\alpha_{,i}\tilde{n}^\beta(t)_{,j} = -\delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k n^\beta(0)_{,j} + M^2_{ij}, \tag{32}$$

где

$$M^2_{ij} = -\delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k \tilde{n}^\beta(t)_{,j} + \delta_{\alpha\beta}\partial_i(a^k) y^\alpha,_k n^\beta(0)_{,j} + M^1_{ij}.$$

Справедливо следующее уравнение:

$$n^\beta(0)_{,j} = -b_{jk} g^{kl} y^\beta_{,l}. \tag{33}$$

Учитывая (33), из (32) находим:

$$-\delta_{\alpha\beta} z^\alpha_{,i}\tilde{n}^\beta(t)_{,j} = \partial_i(a^k) b_{jk} + M^2_{ij}. \tag{34}$$

Введем на F сопряженно изотермическую систему координат (x^1, x^2). Положим:

$$b_{ii} = V, \quad b^{ii} = \frac{1}{V}, \quad i = 1, 2, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b^{12} = b^{21} = 0. \tag{35}$$

В этой системе координат из (34) получим следующие уравнения:

$$-\delta_{\alpha\beta} z^\alpha_{,1}\tilde{n}^\beta(t)_{,1} = V\partial_1(a^1) + M^2_{11},$$

$$-\delta_{\alpha\beta} z^{\alpha}_{,2} \tilde{n}^{\beta}(t)_{,2} = V\partial_2(a^2) + M^2_{22}.$$

По определению $\tilde{n}^{\beta}(t)$ имеем:

$$\tilde{n}^{\beta}(t)_{,j} = n^{\beta}(t)_{,j}. \tag{36}$$

Учитывая (36), получим уравнение:

$$-\delta_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,i} \tilde{n}^{\beta}(t)_{,j} = -\delta_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,i} n^{\beta}(t)_{,j} = b_{ji}. \tag{37}$$

Таким образом, (27), в силу (34) и (37), принимает вид:

$$b_{ij}(t) = -\delta_{\alpha\beta} z^{\alpha}_{,i} \tilde{n}^{\beta}(t)_{,j} - \delta_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,i} \tilde{n}^{\beta}(t)_{,j} = \partial_i(a^k) b_{jk} + M^2_{ij} + b_{ij}. \tag{38}$$

Следовательно,

$$\Delta(b_{ij}) = \partial_i(a^k) b_{jk} + M^2_{ij}. \tag{39}$$

Учитывая соотношения (35), из (39) имеем:

$$\Delta(b_{11}) = V\partial_1(a^1) + M^2_{11}, \tag{40}$$

$$\Delta(b_{22}) = V\partial_2(a^2) + M^2_{22}. \tag{41}$$

Из (26), учитывая (35), находим:

$$\Delta(b) = V(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{22})) + W^{(b)}_2. \tag{42}$$

Справедливо соотношение:

$$\Delta(K) = \frac{1}{b(t)} \left(\Delta(g) - \frac{g}{b} \Delta(b) \right), \quad b(t) = b + \Delta(b). \tag{43}$$

В силу соотношений (42) и (43) имеем:

$$\Delta(g) = \frac{g}{V} \left(\Delta(b_{11}) + \Delta(b_{22}) \right) + \frac{g}{V^2} W^{(b)}_2. \tag{44}$$

В силу соотношений (40) и (41) уравнение (44) приводится к виду:

$$\Delta(g) = g(\partial_1(a^1) + \partial_2(a^2)) + \frac{g}{V}(M^2_{11} + M^2_{22}) + \frac{g}{V^2} W^{(b)}_2. \tag{45}$$

Используя формулу (25) в уравнении (45), найдем условие сохранения произведения главных кривизн при деформации поверхности F в виде:

$$\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + 2q_k a^k - 2\Psi_2 = \frac{1}{V}(M^2_{11} + M^2_{22}) + \frac{1}{V^2} W^{(b)}_2.$$

Отсюда,

$$\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + 2q_k a^k = 2\Psi_2 + \frac{1}{V}(M^2_{11} + M^2_{22}) + \frac{1}{V^2} W^{(b)}_2. \tag{46}$$

Продифференцируем уравнение (46) по t. Тогда мы имеем:

$$\partial_1 \dot{a}^1 + \partial_2 \dot{a}^2 + 2q_k \dot{a}^k = 2\dot{\Psi}_2 + \frac{1}{V}(\dot{M}^2_{11} + \dot{M}^2_{22}) + \frac{1}{V^2} \dot{W}^{(b)}_2.$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$\partial_1 \dot{a}^1 + \partial_2 \dot{a}^2 + q_k^{(b)} \dot{a}^k = \dot{\Psi}_2^{(b)}, \tag{47}$$

где

$$\dot{\Psi}_2^{(b)} = q_0^{(b)} \dot{c} - P_0(\dot{a}^1, \dot{a}^2, \partial_i \dot{a}^j).$$

P_0 имеет явный вид. Заметим, что $q_k^{(b)} \in C^{m-3,\nu}$, $q_0^{(b)} \in C^{m-3,\nu}$ и не зависят от t.

Уравнение (47) определяет деформации $\{F_t\}$ поверхности F, сохраняющие произведения главных кривизн, с условием G-деформации.

Таким образом, весь класс MG-деформаций поверхности F в евклидовом пространстве E^3 описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\partial_2 \dot{a}^1 - \partial_1 \dot{a}^2 + p_k \dot{a}^k = 0, \\ &\partial_1 \dot{a}^1 + \partial_2 \dot{a}^2 + q_k^{(b)} \dot{a}^k = \dot{\Psi}_2^{(b)}. \end{aligned} \tag{48}$$

§ 6. Вывод формул для вычисления $\dot{\Delta}(K)$, $\dot{W}_1$, $\dot{W}_2$

Учитывая равенства (25), (40)–(42), запишем соотношение (43) в виде:

$$\Delta(K) = \frac{1}{b(t)}(\Delta(g) - \frac{g}{b}\Delta(b)) =$$

$$= \frac{g}{b(t)} \left(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + 2q_k a^k - \left(2\Psi_2 + \frac{1}{V}(M_{11}^2 + M_{22}^2) + \frac{1}{V^2} W_2^{(b)} \right) \right), \tag{49}$$

где

$$b(t) = b + \Delta(b), \quad K(t) = K + \Delta(K).$$

Следовательно,

$$\dot{b}(t) = \dot{\Delta}(b), \quad \dot{K}(t) = \dot{\Delta}(K). \tag{50}$$

Из (49), учитывая (50), получим:

$$\dot{\Delta}(K) =$$

$$= -\frac{g\dot{\Delta} b(t)}{(b(t))^2} \left(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + 2q_k a^k - \left(2\Psi_2 + \frac{1}{V}(M_{11}^2 + M_{22}^2) + \frac{1}{V^2} W_2^{(b)} \right) \right) +$$

$$+ \frac{g}{b(t)} \left(\partial_1 \dot{a}^1 + \partial_2 \dot{a}^2 + 2q_k \dot{a}^k - \left(2\dot{\Psi}_2 + \frac{1}{V}(\dot{M}_{11}^2 + \dot{M}_{22}^2) + \frac{1}{V^2} \dot{W}_2^{(b)} \right) \right).$$

Отсюда, учитывая (47), находим:

$$\dot{\Delta}(K) =$$

$$= -\frac{g\dot{\Delta} b(t)}{(b(t))^2} \left(\partial_1 a^1 + \partial_2 a^2 + 2q_k a^k - \left(2\Psi_2 + \frac{1}{V}(M_{11}^2 + M_{22}^2) + \frac{1}{V^2} W_2^{(b)} \right) \right) +$$

$$+ \frac{g}{b(t)} \left(\partial_1 \dot{a}^1 + \partial_2 \dot{a}^2 + q_k^{(b)} \dot{a}^k - \dot{\Psi}_2^{(b)} \right).$$

Найдем $\dot{W}_1$. Функция W_1 определена формулой (20). Дифференцируя W_1 по t, имеем:

$$\dot{W}_1 = \delta_{\alpha\beta} g^{ij} \dot{z}^\alpha{}_{,i} z^\beta{}_{,j} + \delta_{\alpha\beta} g^{ij} z^\alpha{}_{,i} \dot{z}^\beta{}_{,j}.$$

Найдем $\dot{W}_2$. Функция W_2 введена по формуле (22). Дифференцируя W_2 по t, имеем:

$$\dot{W}_2 = \dot{\Delta}(g_{11})\Delta(g_{22}) + \Delta(g_{11})\dot{\Delta}(g_{22}) - 2\Delta(g_{12})\dot{\Delta}(g_{12}). \quad (51)$$

Для $\Delta(g_{ij})$ имеет место соотношение (18). Из (18) находим:

$$\dot{\Delta}(g_{ij}) = \delta_{\alpha\beta} y^{\alpha},_i \dot{z}^{\beta},_j + \delta_{\alpha\beta} y^{\beta},_j \dot{z}^{\alpha},_i + \delta_{\alpha\beta} \dot{z}^{\alpha},_i z^{\beta},_j + \delta_{\alpha\beta} z^{\alpha},_i \dot{z}^{\beta},_j. \quad (52)$$

Подставив (52) в (51), находим выражение для $\dot{W}_2$.

§ 7. Вспомогательные оценки норм функций, описывающих MG-деформации

Лемма 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\exists t_0 > 0$ такое, что $a^k(t), \partial_i a^k(t), \dot{a}^k(t), \partial_i \dot{a}^k(t)$ — непрерывны по $t, \forall t \in [0, t_0]$, $a^k(0) \equiv 0, \partial_i a^k(0) \equiv 0$.

2) $\exists t_0 > 0$ такое, что $a^i(t) \in C^{m-2,\nu}, \partial_k a^i(t) \in C^{m-3,\nu}$, $\forall t \in [0, t_0]$.

Тогда $\exists t_* > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_*)$ $P_0 \in C^{m-3,\nu}$ и выполняется следующее неравенство:

$$\|P_0(\dot{a}^1_{(1)}, \dot{a}^2_{(1)}) - P_0(\dot{a}^1_{(2)}, \dot{a}^2_{(2)})\|_{m-2,\nu} \leq$$
$$\leq M_1(t)(\|\dot{a}^1_{(1)} - \dot{a}^1_{(2)}\|_{m-1,\nu} + \|\dot{a}^2_{(1)} - \dot{a}^2_{(2)}\|_{m-1,\nu}),$$

где для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что для всех $t \in [0, t_0)$ выполняется неравенство: $M_1(t) < \varepsilon$.

Доказательство леммы 2 следует из построения функции P_0 и леммы 1.

Пусть целое число m_1 удовлетворяет неравенству $0 \leq m_1 \leq m - 2$.

Обозначим: $\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} = \max_{\alpha,i} \|z^{\alpha}_{,i}\|^{(t)}_{m_1,\nu} = \max_{\alpha,i} \max_{\tau \in [0;t]} \|z^{\alpha}_{,i}(\tau)\|_{m_1,\nu}$.

Лемма 3. *Выполняются следующие оценки:*

1) $\|W_1\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_2((\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2 + \|z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + (\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2)$,

2) $\|\Delta(g_{ij})\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_3(\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + (\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2 + \|z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + (\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2)$,

3) $\|W_2\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_4(\max_{i,j} \|\Delta(g_{ij})\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2$,

где постоянные M_2, M_3, M_4 определяются поверхностью F и не зависят от t.

Доказательство леммы 3 следует из свойств норм в пространстве $C^{m_1,\nu}$.

Лемма 4. *Выполняются следующие оценки:*

1) $\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_5(\|a\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|c\|^{(t)}_{m_1,\nu})$,

2) $\|a\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_6\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu}$,

3) $\|c\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_7\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu}$,

4) $\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} \leq M_8\|z\|^{(t)}_{m_1+1,\nu}$,

где постоянные M_5, M_6, M_7, M_8 определяются поверхностью F и не зависят от t.

Доказательство леммы 4 следует из свойств норм в пространстве $C^{m_1,\nu}$.

Лемма 5. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\exists t_0 > 0$ такое, что $c(t), c_{,i}(t), a^k(t), \partial_i a^k(t)$ — непрерывны по $t, \forall t \in [0, t_0]$, $c(0) \equiv 0, c_{,i}(0) \equiv 0, a^k(0) \equiv 0, \partial_i a^k(0) \equiv 0$,

2) $\exists t_0 > 0$ такое, что $z^{\alpha}(t) \in C^{m-2,\nu}, z^{\alpha}_{,i}(t) \in C^{m-3,\nu}$, $\forall t \in [0, t_0]$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists t_0 > 0$ такое, что

1) $\|W_1\|^{(t)}_{m-3,\nu} \leq \varepsilon, \forall t \in [0, t_0]$, *2)* $\|W_2\|^{(t)}_{m-3,\nu} \le \varepsilon, \forall t \in [0, t_0]$,

3) $\|\Psi_2\|^{(t)}_{m-3,\nu} \le \varepsilon, \forall t \in [0, t_0]$.

Доказательство леммы 5 следует из вида функций W_1, W_2, Ψ_2, свойств пространства $C^{m,\nu}$ и лемм 1–4.

Лемма 6. *Выполняются следующие оценки:*

1) $\|\dot W_1\|^{(t)}_{m_1,\nu} \le M_9 \left(\|\dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|\dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial \dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \right.$
$\left. + \|\dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}(\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2 + \|\partial \dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\right)$,

2) $\|\dot\Delta(g_{ij})\|^{(t)}_{m_1,\nu} \le M_{10} \left(\|\partial \dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|\dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|\dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \right.$
$\left. + \|z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial \dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu} + \|\dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}(\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu})^2 + \|\partial \dot z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\|\partial z\|^{(t)}_{m_1,\nu}\right)$,

3) $\|\dot W_2\|^{(t)}_{m_1,\nu} \le M_{11} \left(\max_{i,j} \|\dot\Delta(g_{ij})\|^{(t)}_{m_1,\nu}\right) \left(\max_{i,j} \|\Delta(g_{ij})\|^{(t)}_{m_1,\nu}\right)$,

где постоянные M_9, M_{10}, M_{11} определяются поверхностью F и не зависят от t.

Доказательство леммы 6 следует из построения функций W_1, W_2, $\dot W_1$, $\dot W_2$, свойств пространства $C^{m_1,\nu}$ и лемм 1–5.

Лемма 7. *В условиях леммы 5 имеет место следующее утверждение.*

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 > 0$ такое, что

1) $\|\dot W_1\|^{(t)}_{m-3,\nu} \le \varepsilon, \forall t \in [0, t_0]$,

2) $\|\dot W_2\|^{(t)}_{m-3,\nu} \le \varepsilon, \forall t \in [0, t_0]$,

3) $\|\dot\Psi_2\|^{(t)}_{m-3,\nu} \le \varepsilon, \forall t \in [0, t_0]$.

Доказательство леммы 7 следует из вида функций W_1, W_2, $\dot W_1$, $\dot W_2$, свойств пространства $C^{m_1,\nu}$ и лемм 1–6.

§ 8. Разрешимость краевой задачи A

Весь класс MG-деформаций описывается системой дифференциальных уравнений эллиптического типа (48). Обозначив переменную x^1 как x^2, переменную x^2 — как x^1, не ограничивая общности, можем привести (48) к следующему виду:

$$\partial_1 \dot a^1 - \partial_2 \dot a^2 + p_k \dot a^k = 0,$$

$$\partial_2 \dot a^1 + \partial_1 \dot a^2 + q_k^{(b)} \dot a^k = \dot\Psi_2^{(b)}.$$

Введем обозначения: $w = a^1 + ia^2, z = x^1 + ix^2$.

Таким образом, мы получаем следующую краевую задачу для обобщенных аналитических функций:

$$\partial_{\bar z} \dot w + A\dot w + B\bar{\dot w} = \dot\Psi_0, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot w\} = \dot\varphi \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{53}$$

где

$$\partial_{\bar z}\dot w = \frac{1}{2}(\dot w_x + i\dot w_y), A = \frac{1}{4}\left(p_1 + q_2^{(b)} + iq_1^{(b)} - ip_2\right),$$

$$B = \frac{1}{4}\left(p_1 - q_2^{(b)} + iq_1^{(b)} + ip_2\right), \dot\Psi_0 = \frac{1}{2}\left(i\dot\Psi_2^{(b)}\right).$$

Заметим, что в силу леммы 1 функция $\dot c$ однозначно определяется некоторым оператором T_D в области D.

$$\dot c = T_D(\dot w, z).$$

Изменим форму записи полученной краевой задачи (53). Для этого рассмотрим следующие соотношения:

$$\dot{\Psi}_2^{(b)} = q_0^{(b)}\dot{c} - P_0 = q_0^{(b)}T_D - P_0, \tag{54}$$

$$\dot{\Psi}_3 = -P_0, \tag{55}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{2}(i\dot{\Psi}_3). \tag{56}$$

С учетом соотношений (54)–(56), краевая задача (53) принимает следующий вид:

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} + i\frac{q_0^{(b)}}{2}T_D = \dot{\Psi},$$

$$Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{57}$$

Положим

$$E(\dot{w}) = i\frac{q_0^{(b)}}{2}T_D. \tag{58}$$

Учитывая обозначение (58), запишем краевую задачу (57) в следующем виде:

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} + E(\dot{w}) = \dot{\Psi}, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial D.$$

Рассмотрим вдоль ∂F векторное поле (v^α), касательное к F, определенное формулой (1), и рассмотрим краевое условие (2). В обозначениях (3)–(5) краевое условие

$$Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial D$$

принимает вид:

$$Re\{(\dot{a^1} + i\dot{a^2})(\tilde{\lambda}_1 - i\tilde{\lambda}_2)\} = \dot{\tilde{\gamma}} \quad \text{на} \quad \partial F,$$

где

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{(\tilde{\lambda}_1)^2 + (\tilde{\lambda}_2)^2}.$$

Учитывая (4), запишем искомое краевое условие в виде:

$$Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial F, \quad \text{где} \quad |\lambda| = 1.$$

Таким образом, мы приходим к следующей краевой задаче (A):

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} + E(\dot{w}) = \dot{\Psi}, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{59}$$

где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $|\lambda| \equiv 1$, $\lambda, \dot{\varphi} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$.

Будем учитывать следующее:

$$\dot{\Psi} = \dot{\Psi}(\dot{w}, z, t), \quad E(\dot{w}) = E(\dot{w}, z, t), \quad \dot{w} = \dot{w}(t),$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(s, t), \quad s \in \partial D, \quad \lambda = \lambda(s), \quad s \in \partial D.$$

Заметим, что индекс N краевой задачи (59) определен равенством (6).

Исследуем разрешимость краевой задачи (A). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть t — фиксированное число. Пусть функции $A(z)$, $B(z)$, $\dot{\Psi}(z) \in C^{m-3,\nu}(\overline{D})$, функции $\lambda(s)$, $\dot{\varphi} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$ и имеют место следующие соотношения: $|\lambda(s)| \equiv 1$, $\dot{\Psi}(0,z) = 0$, $\|\dot{\Psi}(\dot{w}_1, z) - \dot{\Psi}(\dot{w}_2, z)\|_{m-2,\nu} \leq \mu(\rho)\|\dot{w}_1 - \dot{w}_2\|_{m-1,\nu}$. Пусть $\lim_{\rho\to 0}\mu(\rho) = 0$ для $\|\dot{w}_1\|_{m-2,\nu} \leq \rho$, $\|\dot{w}_2\|_{m-2,\nu} \leq \rho$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Если $N \geq 0$, то существуют ρ и $\varepsilon(\rho) > 0$ такие, что для $\|\dot{\varphi}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon$ краевая задача (A) имеет решение класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$ для любой допустимой $\dot{\varphi}$, непрерывно зависящее от $(2N+1)$ произвольных действительных параметров.

2. Если $N < 0$, то существуют $\rho > 0$ и $\varepsilon(\rho) > 0$ такие, что для $\|\dot{\varphi}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(\rho)$ краевая задача (A) имеет не более одного решения класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$ для любой допустимой $\dot{\varphi}$. При этом для $\dot{\varphi} \equiv 0$ краевая задача (A) с условием $\|\dot{w}\|_{m-2,\nu} \leq \rho$ имеет только нулевое решение.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу (A_0):

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A\dot{w} + B\bar{\dot{w}} = \dot{\Psi}, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot{w}\} = \dot{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial D,$$

где $|\lambda| \equiv 1$, $\dot{\varphi} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$, $\dot{\Psi} \in C^{m-3,\nu}(\overline{D})$.

Рассмотрим оператор:

$$I(\dot{\Psi}, z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D (\Omega_1(z,\zeta)\dot{\Psi}(\zeta) + \Omega_2(z,\zeta)\overline{\dot{\Psi}(\zeta)})d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta,$$

где Ω_1, Ω_2 — главные ядра уравнения $\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A(z)\dot{w} + B(z)\bar{\dot{w}} = 0$.

Известно [9], что оператор $I(\dot{\Psi}, z)$ имеет вид:

$$I(\dot{\Psi}, z) = T(\dot{\Psi}) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D (K_1(z,\zeta)\dot{\Psi}(\zeta) + \Omega_2(z,\zeta)\overline{\dot{\Psi}(\zeta)})d\xi d\eta, \zeta = \xi + i\eta,$$

где

$$T(\dot{\Psi}) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\dot{\Psi}(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta.$$

Оператор $T(\dot{\Psi})$ — вполне непрерывен [9].

Рассмотрим оператор

$$A(\dot{\Psi}, z) = I(\dot{\Psi}, z) + \int\limits_{\partial D} Re\{\overline{\lambda(s)}I(\dot{\Psi}, s)\}M_0(z,s)ds,$$

где $M_0(z,s)$ — ядро следующей краевой задачи (и не зависит от $\dot{\varphi}$):

$$\partial_{\bar{z}}\dot{w} + A(z)\dot{w} + B(z)\bar{\dot{w}} = 0, \quad Re\{\overline{\lambda(s)}w(s)\} = \dot{\varphi}, \quad s \in \partial D.$$

Рассмотрим оператор

$$A_2(\dot{w}) = A_1(\dot{w}) = A(\dot{\Psi}(\dot{w}, z)).$$

В соответствии с результатами, полученными в [10], теорема 2 справедлива для задачи (A_0).

А именно для случая $N \geq 0$ задача (A_0) решается так:

$$\dot{w} = A_2(\dot{w}) + \int\limits_{\partial D} \dot{\varphi}(s) M_0(z,s) ds + \sum_{i=1}^{2N+1} c_i(t) \dot{w}_i,$$

где $\dot{w}_i$ $(i = 1, \ldots, (2N+1))$ — линейно независимая система функций, являющихся решением однородной задачи, соответствующей задаче (A_0), $c_i(t)$ $(i = 1, \ldots, (2N+1))$ — произвольные вещественные постоянные, соответствующие значению параметра t.

И, значит, для случая $N \geq 0$ задача (A) имеет следующее решение:

$$\dot{w} = A_2(\dot{w}) + \int\limits_{\partial D} \dot{\varphi}(s) M_0(z,s) ds + \sum_{i=1}^{2N+1} c_i(t) \dot{w}_i + A_2(E(\dot{w})). \tag{60}$$

Используя теорию Фредгольма для операторов и теорию операторных уравнений Вольтерра, мы можем решить уравнение (60) методом последовательных приближений. При этом решение непрерывно зависит от $(2N+1)$ произвольных вещественных постоянных $c_i(t)$ $(i = 1, \ldots, (2N+1))$.

Для случая $N < 0$ мы решим задачу (A_0) как систему уравнений, состоящую из $(-2N)$ уравнений:

$$\dot{w} = A_2(\dot{w}) + \int\limits_{\partial D} \dot{\varphi}(s) M_0(z,s) ds,$$

$$\int\limits_{\partial D} (\dot{\varphi}(s) + Re\{\overline{\lambda(s)} I(\dot{\Psi}, s)\}) \dot{w}'_j(s) \lambda(s) ds = 0, \quad j = \overline{1, (-2N-1)},$$

где $\dot{w}'_j$ — полная система решений следующей задачи:

$$\partial_{\bar{z}} \dot{w}' - A(z)\dot{w}' - \bar{B}(z)\overline{\dot{w}}' = 0, \quad Re\{\lambda(z) \frac{dz(s)}{ds} \dot{w}'(z)\} = 0 \quad \text{на} \quad \partial D.$$

Таким образом, для случая $N < 0$ мы решим задачу (A) как следующую систему, состоящую из $(-2N)$ уравнений:

$$\dot{w} = A_2(\dot{w}) + \int\limits_{\partial D} \dot{\varphi}(s) M_0(z,s) ds + A_2(E(\dot{w})),$$

$$\int\limits_{\partial D} (\dot{\varphi}(s) + Re\{\overline{\lambda(s)} I(\dot{\Psi}, s)\}) \dot{w}'_j(s) \lambda(s) ds = 0, \quad j = \overline{1, (-2N-1)}, \tag{61}$$

где $\dot{w}'_j$ — полная система решений задачи:

$$\partial_{\bar{z}} \dot{w}' - A(z)\dot{w}' - \bar{B}(z)\overline{\dot{w}}' = 0, \quad Re\{\lambda(z) \frac{dz(s)}{ds} \dot{w}'(z)\} = 0 \quad \text{на} \quad \partial D.$$

Для системы уравнений (61) мы будем использовать теорию Фредгольма для вполне непрерывных операторов и теорию операторных уравнений Вольтерра. Изменяя стандартный метод из [10], используя метод последовательных приближений и принцип сжимающих отображений, получим доказательство теоремы 2 для краевой задачи (A).

Теорема 3. *Пусть* $F \in C^{m,\nu}, \nu \in (0;1), m \geq 4$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Если $N \geq 0$, *то существуют* $t_0 > 0$ *и* $\varepsilon(t_0) > 0$ *такие, что для* $\|\dot{\varphi}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon$ *краевая задача (A) для всех* $t \in [0, t_0)$ *имеет решение класса* $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, *непрерывное по* $t \in [0, t_0)$ *для любой допустимой* $\dot{\varphi}$, *непрерывно зависящее от* $(2N+1)$ *произвольных действительных непрерывных функций* $c_i(t)$, $i = \overline{1, (2N+1)}$, *удовлетворяющих условиям:* $c_i(0) = 0$, $i = \overline{1, (2N+1)}$.

2. Если $N < 0$, *то существуют* $t_0 > 0$ *и* $\varepsilon(t_0) > 0$ *такие, что для* $\|\dot{\varphi}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$ *краевая задача* (A) *для всех* $t \in [0, t_0)$ *имеет не более одного решения класса* $C^{m,\nu}(\overline{D})$, *которое непрерывно по* $t \in [0, t_0)$ *для любой допустимой* $\dot{\varphi}$. *При этом для* $\dot{\varphi} \equiv 0$ *краевая задача* (A) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Выберем систему действительных функций $c_i(t)$ $(i = 1, \ldots, (2N+1))$ так, чтобы все они были непрерывны по t и удовлетворяли условиям: $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, (2N+1)$. Тогда доказательство теоремы 3 следует из теоремы 2, вида функции $\dot{\Psi}$ и того факта, что для всех достаточно малых t выполняются условия теоремы 2. Непрерывность решения краевой задачи (A) следует из непрерывности функций $c_i(t)$, $i = \overline{1, (2N+1)}$.

§ 9. Доказательство теоремы 1

1) Пусть $N > 0$. Тогда в силу теоремы 3 существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для $\|\dot{\varphi}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon$ краевая задача (A) для всех $t \in [0, t_0)$ имеет решение класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывное по $t \in [0, t_0)$ для любой допустимой $\dot{\varphi}$, непрерывно зависящее от $(2N+1)$ произвольных действительных непрерывных функций $c_i(t)$, $i = \overline{1, (2N+1)}$; $c_i(0) = 0$, $i = \overline{1, (2N+1)}$. При этом решение задачи (A) находится из уравнения (61). По условию теоремы 1 в точке $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$ области D выполняется следующее тождество: $z^\sigma(t) \equiv 0 \,\forall t$, $\sigma = 1, 2, 3$. Из этого тождества мы получим два дополнительных уравнения для действительных функций $c_i(t)$, $i = 1, ..., 2N+1$:

$$\dot{w}(x^1_{(0)}, x^2_{(0)}) = A_2(\dot{w}(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})) + \int\limits_{\partial D} \dot{\varphi}(s) M_0(z_0, s) ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2N+1} c_i(t) \dot{w}_i(x^1_{(0)}, x^2_{(0)}) + A_2(E(\dot{w}(x^1_{(0)}, x^2_{(0)}))),$$

где $z_0 = x^1_{(0)} + i x^2_{(0)}$.

Таким образом, количество независимых функций $c_i(t)$ уменьшается на 2. Так как получаем 2 дополнительных уравнения относительно действительных функций $c_i(t)$ $(i = 1, \ldots, (2N+1))$ при том условии, что $\dot{w}_i$ $(i = 1, \ldots, (2N+1))$ — линейно независимая система функций.

2) При $N = 0$ имеется только один действительный параметр c_1. Обратимся к условию теоремы 1: в точке $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$ области D имеет место следующее тождество: $z^\sigma(t) \equiv 0 \,\forall t$, $\sigma = 1, 2, 3$. Это условие приводит к двум дополнительным уравнениям для действительного параметра c_1. Значит, существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех

$t \in [0, t_0)$ существует не более одной MG-деформации класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывной по t.

Если $N < 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для $\|\dot{\varphi}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$ краевая задача (A) для всех $t \in [0, t_0)$ имеет не более одного решения класса $C^{m,\nu}(\overline{D})$, которое непрерывно по $t \in [0, t_0)$ для любой допустимой $\dot{\varphi}$. При этом для $\dot{\varphi} \equiv 0$ краевая задача (A) имеет только нулевое решение. Отсюда, аналогично случаю $N = 0$, получим утверждение теоремы для $N < 0$.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бодренко, А. И. Аналитические почти ARG-деформации поверхностей в евклидовых пространствах / А. И. Бодренко // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2012. — № 16. — С. 5–11.

2. Бодренко, А. И. Аналог неравенства Шаудера для замкнутых поверхностей в евклидовых пространствах / А. И. Бодренко // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2008. — № 11. — С. 6–12.

3. Бодренко, А. И. Некоторые свойства операторов эллиптического типа / А. И. Бодренко // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2010. — № 13. — С. 15–22.

4. Бодренко, А. И. Некоторые свойства AR-деформаций / А. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1999. — Т. 6, № 1. — С. 124.

5. Бодренко, А. И. Непрерывные почти ARG-деформации гиперповерхностей в евклидовом пространстве / А. И. Бодренко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1996. — № 2. — С. 13–16.

6. Бодренко, А. И. Почти AR-деформации поверхностей с условием обобщенного скольжения / А. И. Бодренко // Вестник ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. — 2011. — № 14. — С. 5–9.

7. Бодренко, А. И. Почти ARG-деформации второго порядка поверхностей в римановом пространстве / А. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 1998. — Т. 5, № 2. — С. 202.

8. Бодренко, А. И. Свойства обобщенных G-деформаций с условием ареальности нормального типа в римановом пространстве / А. И. Бодренко // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2000. — Т. 7, № 2. — С. 478.

9. Векуа, И. Н. Обобщенные аналитические функции / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1988. — 512 с.

10. Забеглов, А. В. О разрешимости одной нелинейной краевой задачи, возникающей при AG-преобразованиях поверхностей с краем / А. В. Забеглов // Отображение поверхностей римановых пространств, описываемых рекуррентными соотношениями заданного вида. Теоремы существования и единственности : сборник. — Таганрог : Изд-во ТГПИ, 1998. — Т. 1. — С. 27–37.

11. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М. : Наука, 1973. — 576 с.

12. Фоменко, В. Т. О решении обобщенной проблемы Минковского для поверхности с краем / В. Т. Фоменко // Отображение поверхностей римановых пространств, описываемых рекуррентными соотношениями заданного вида. Теоремы существования и единственности : сборник. — Таганрог : Изд-во ТГПИ, 1998. — Т. 1. — С. 56–65.

13. Эйзенхарт, Л. П. Риманова геометрия / Л. П. Эйзенхарт. — М. : Изд. ин. лит., 1948. — 316 с.

14. Bodrenko, A. I. Some properties of continuous almost ARG-deformations / A. I. Bodrenko // Russian Mathematics. — 1996. — V. 40, № 2. — P. 11–14.

REFERENCES

1. Bodrenko A.I. Analiticheskie pochti *ARG*-deformatsii poverkhnostey v evklidovykh prostranstvakh [Analytic almost *ARG*-deformations of surfaces in Euclidean spaces]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2012, no. 16, pp. 5–11.

2. Bodrenko A.I. Analog neravenstva Shaudera dlya zamknutykh poverkhnostey v evklidovykh prostranstvakh [The analog of Schauder inequality for closed surfaces in Euclidean spaces]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2008, no. 11, pp. 6–12.

3. Bodrenko A.I. Nekotorye svoystva operatorov ellipticheskogo tipa [Some properties of elliptic operators]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2010, no. 13, pp. 15–22.

4. Bodrenko A.I. Nekotorye svoystva *AR*-deformatsiy [Some properties of *AR*-deformations]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 1999, vol. 6, no. 1, pp. 124.

5. Bodrenko A.I. Nepreryvnye pochti *ARG*-deformatsii giperpoverkhnostey v evklidovom prostranstve [Continuous almost ARG-deformations of hypersurfaces in Euclidean space]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics], 1996, no. 2, pp. 13–16.

6. Bodrenko A.I. Pochti *AR*-deformatsii poverkhnostey s usloviem obobschennogo skol'zheniya [Almost *AR*-deformations of surfaces with condition of generalized sliding]. *Vestnik VolGU. Ser. 1, Matematika. Fizika* [Journal of Volgograd State University, series 1, Mathematics. Physics], 2011, no. 14, pp. 5–9.

7. Bodrenko A.I. Pochti *ARG*-deformatsii vtorogo poryadka poverkhnostey v rimanovom prostranstve [Almost *ARG*-deformations of the second order in Riemannian space]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 1998, vol. 5, no. 2, pp. 202.

8. Bodrenko A.I. Svoystva obobschennykh *G*-deformatsiy s usloviem areal'nosti normal'nogo tipa v rimanovom prostranstve [The properties of generalized *G*-deformations with condition of areal of normal type in Riemannian space]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2000, vol. 7, no. 2, pp. 478.

9. Vekua I.N. *Obobschennye analiticheskie funktsii* [Generalized analytic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.

10. Zabeglov A.V. O razreshimosti odnoy nelineynoy kraevoy zadachi, voznikayuschey pri *AG*-preobrazovaniyakh poverkhnostey s kraem [On decidability of one nonlinear boundary-value problem for *AG*-deformations of surfaces with boundary]. *Otobrazhenie poverkhnostey rimanovykh prostranstv, opisyvaemykh rekurrentnymi sootnosheniyami zadannogo vida. Teoremy suschestvovaniya i edinstvennosti : sbornik* [Transformations of surfaces of Riemannian spaces determined by given recurrent relations. Theorems of unique existence: collection of science works]. Taganrog, TGPI Publ., 1998, vol. 1, pp. 27–37.

11. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Elliptic Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 576 p.

12. Fomenko V.T. O reshenii obobschennoy problemy Minkovskogo dlya poverkhnosti s kraem [On solution of the generalized Minkowski problem for surface with boundary]. *Otobrazhenie poverkhnostey rimanovykh prostranstv, opisyvaemykh rekurrentnymi sootnosheniyami zadannogo vida. Teoremy suschestvovaniya i edinstvennosti : sbornik* [Transformations of surfaces of Riemannian spaces determined by given recurrent relations. Theorems of unique existence: collection of science works]. Taganrog, TGPI Publ., 1998, vol. 1, pp. 56–65.

13. Eisenhart L.P. *Rimanova geometriya* [Riemannian geometry]. Moscow, Izd. in. lit. Publ., 1948. 316 p.

14. Bodrenko A.I. Some properties of continuous almost *ARG*-deformations. *Russian Mathematics*, 1996, vol. 40, no. 2, pp. 11–14.

CONTINUOUS *MG*-DEFORMATIONS OF SURFACES WITH BOUNDARY IN EUCLIDEAN SPACE

Bodrenko Andrey Ivanovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Department of Fundamental Informatics and Optimal Control
Volgograd State University
bodrenko@mail.ru
Prospekt Universitetskij, 100, 400062 Volgograd, Russian Federation

Abstract. The properties of continuous deformations of surfaces with boundary in Euclidean 3-space preserving its Grassmannian image and product of the principal curvatures are studied in this article.

We determine the continuous MG-deformation for simply connected oriented surface F with boundary ∂F in Euclidean 3-space. We derive the differential equations of G-deformations of surface F. We prove the set of lemmas where we derive auxiliary estimations on norms of functions characterizing MG-deformations of surface F.

Then on the surface F we introduce conjugate isothermal coordinate system which simplifies the form of equations of G-deformations.

From the system of differential equations characterizing G-deformations of surface F in conjugate isothermal coordinate system we go to the nonlinear integral equation and resolve it by the method of successive approximations.

We derive the equations of MG-deformations of surface F. We get the formulas of change $\Delta(g)$ and $\Delta(b)$ of determinants g and b of matrixes of the first and the second fundamental forms of surface F, respectively, for deformation $\{F_t\}$. Then, using formulas of $\Delta(g)$ and $\Delta(b)$, we find the conditions characterizing MG-deformations of two-dimensional surface F in Euclidean space E^3.

We show that finding of MG-deformations of surface F brings to the following boundary-value problem (A):

$$\partial_{\bar z}\dot w + A\dot w + B\bar{\dot w} + E(\dot w) = \dot\Psi, \qquad Re\{\overline{\lambda}\dot w\} = \dot\varphi \quad \text{on} \quad \partial F,$$

where A, B, λ, $\dot\Psi$, $\dot\varphi$ are given functions of complex variable, $\dot w$ is unknown function of complex variable, operator $E(\dot w)$ has implicit form.

Prior to resolving boundary-value problem (A) we find the solution of the following boundary-value problem for generalized analytic functions:

$$\partial_{\bar z}\dot w + A\dot w + B\bar{\dot w} = \dot\Psi, \quad Re\{\overline{\lambda}\dot w\} = \dot\varphi \quad \text{on} \quad \partial F.$$

Then we use the theory of Fredholm operator of index zero and the theory of Volterra operator equation. Using the method of successive approximations and the principle of contractive mapping, we obtain solution of boundary-value problem (A) and the proof of theorem 1, the main result of this article.

Key words: deformation of surface, mean curvature, Gaussian curvature, G-deformation, continuous deformation.